ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

FRITZ REGLER UND HANS THIRRING
WIEN WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN
GRAZ

14. BAND 2. HEFT

MIT 53 ABBILDUNGEN
(AUSGEGEBEN IM AUGUST 1961)

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1961

Acta Phys. Austr.

Die **Acta Physica** erscheinen zwanglos nach Maßgabe der einlaufenden Arbeiten in Heften wechselnden Umfanges, die zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt werden. Arbeiten können in den Sprachen der internationalen Kongresse erscheinen.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca", Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5, oder an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, zu richten; **alle geschäftlichen Mitteilungen** an den Springer-Verlag, Wien I., Mölkerbastei 5, Tel. 63 96 14 Serie. Telegrammadresse: Springerbuch Wien.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 100 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 100 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Allgemeine Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen: Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht mit demselben Problem vertraut sind. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift soll ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle sein. Die Herausgeber erachten es als ihre Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter, linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenem Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen".

Zusammenfassungen: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Übersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender, erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerläßlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

14. Band/2. Heft — Inhaltsverzeichnis

Seite

Schmid, E. FRIEDRICH BLAHA † 113

Hanke, Ingrid. Störstellen in Kalzitkristallen. II. Nachweis ätzempfindlicher Störstellen und ihre Verteilung in der Umgebung von Ritzspuren und Eindringfiguren auf Rhomboederspaltflächen 115

Bauer, J. Über den Einfluß eines elektrischen Feldes auf die innere Reibung eines Dipolgases 140

Kummer, W. Eichtransformation und Quantelung des freien elektromagnetischen Feldes 149

Otter, G. Untersuchungen zur Streamtheorie des Tagesganges 154

Flamm, D. Der Beitrag indirekter Prozesse zum $\Lambda_{\epsilon 3}$-Zerfall 164

Vodička, V. Steady Temperature in a Three-Layered Strip 175

Sexl, R. Zur Theorie der Vielfachstreuung 180

Mittelbach, P. und **G. Porod.** Zur Röntgenkleinwinkelstreuung verdünnter kolloider Systeme. Die Berechnung der Streukurven von Parallelepipeden 185

Krzywoblocki, M. Z. v. On the So-called Stagnation Conditions and Energy (Heat) Function in Diabatic Flow 212

Bauer, J. und **J. Schneider.** Über die Stromdichteverteilung in zylindrischen Leitern mit elliptischem Querschnitt bei axialer Richtung des Wechselstromes 218

Pham Mau Quan. Sur la dynamique analytique du point en relativité . . 232

Krzywoblocki, M. Z. v. On the General Form of the Special Theory of Relativity. IV 239

Buchbesprechungen 242

Friedrich Blaha †

Am 23. Oktober 1960 starb in Wien der Universitätsdozent Dr. Friedrich Blaha. Er wurde am 31. März 1919 in Wien geboren, legte 1937 die Reifeprüfung an einem humanistischen Gymnasium in Wien ab, promovierte 1945 an der Universität Wien nach mehrfacher Unterbrechung seines Studiums durch Einberufung zum Heer, wird wissenschaftliche Hilfskraft, 1946 Assistent am I. Physikalischen Institut der Universität Wien, legt die Lehramtsprüfung für Physik und Mathematik ab. 1950 erhält er ein Forschungsstipendium für einen einjährigen Aufenthalt an der Universität Leeds (England). Nach seiner Rückkehr übernimmt er eine Assistentenstelle am II. Physikalischen Institut der Universität Wien, die er bis zu seinem Tode innehat. 1954 war er zu Austauschvorträgen nach Leeds eingeladen. Mit Dekret vom 13. Juli 1954 wurde seine Habilitation für das Fach Experimentalphysik bestätigt.

Die wissenschaftlichen Arbeiten Blahas betreffen sehr verschiedenartige Themen, die er teilweise durch Anregung von außen, vor allem aber auf Grund eigener Problemstellung bearbeitet. Die Dissertation befaßte sich mit der Temperaturabhängigkeit von Leitfähigkeit und Dielektrizitätskonstante von Seignettesalzpräparaten. Es folgen die räumliche Sichtbarmachung magnetischer Kraftlinien, experimentelle Beiträge zur Magneto-Photophorese und zur Tropfenkorrosion. Sehr ansprechend ist ein Versuch zur Demonstration der Emission und Adsorption von Natriumdampf. In zwei theoretischen Arbeiten wird die Lichtdurchlässigkeit von Nebeln behandelt. Auf den Aufenthalt in Leeds geht eine Untersuchung zur Bestimmung der magnetischen Suszeptibilität mit einer Quarzwaage zurück, die zu großer Empfindlichkeit ausgebaut wurde. Die Habilitationsschrift betrifft Wachstumsstrukturen in aus der Schmelze erstarrten Metallkristallen. Sie enthält eine ganze Reihe neuer Feststellungen: die Bedeutung des Temperaturgradienten im Erstarrungsgebiet wird erkannt, ein bisweilen außerordentlich regelmäßiges Polygonnetz auf der Abschlußfläche wird aufgefunden und seine Entstehung gedeutet. In Fortführung dieser Arbeit wird die Lamellenstruktur an stabförmigen Cadmiumkristallen mit modernsten Verfahren (Phasenkontrast- und Interferenzmikroskopie) untersucht. Besonders originell sind die Arbeiten, die Blaha mit einer Reihe von Mitarbeitern über die statische Verformung von Metallkristallen unter gleichzeitiger Überlagerung von Ultraschall durchgeführt hat, Arbeiten, die Blahas Namen international bekannt gemacht haben. Es handelt

sich hierbei um ein neues Gebiet der Festkörperphysik, das, heute erst am Beginn der Entwicklung stehend, nicht nur theoretisch interessante, sondern auch technisch sehr bedeutsame Ergebnisse erwarten läßt.

Die Gesamtzahl der Veröffentlichungen BLAHAS beträgt etwa 40. Kennzeichnend für BLAHAS wissenschaftliche Arbeit war stets eine klare Fragestellung und eine originelle und sorgfältige experimentelle Behandlung des Themas.

Seine Lehrtätigkeit umfaßte Vorlesungen über Kristallwachstum und Kristallplastizität, die Leitung des Physikalischen Praktikums für Vorgeschrittene und die Beaufsichtigung zahlreicher Dissertanten.

Neben seiner Tätigkeit im Physikalischen Institut war BLAHA seit 1958 der Österreichische Vertreter im OEEC Direktionskomitee für wissenschaftliche und technische Fachkräfte.

Persönlich war BLAHA durch eine außerordentliche Hingabe an seine Arbeiten und die übernommenen Pflichten ausgezeichnet, eine Haltung, die er auch nach einer schweren Erkrankung im Jahre 1957, die eine Kopfoperation erforderlich machte, mit bewundernswerter Energie bis zu seinem Tode beibehalten hat. Der Verlust dieses hochbegabten Forschers trifft die österreichische Physik schwer, da BLAHA zu den befähigsten Vertretern der jüngeren Generation der Festkörperphysiker zählte. Die Lücke, die sein Tod im Institut hinterläßt, ist nicht zu schließen, sie wird nur schwer zu überbrücken sein.

E. SCHMID, Wien

Störstellen in Kalzitkristallen*

II. Teil:

Nachweis ätzempfindlicher Störstellen und ihre Verteilung in der Umgebung von Ritzspuren und Eindringfiguren auf Rhomboederspaltflächen

Von

Ingrid Hanke

Physikalisches Institut der Universität Graz

Mit 30 Abbildungen

(*Eingegangen am 29. Februar 1960*)

Zusammenfassung

Durch Einwirken von Essigsäurelösungen geringer Konzentration auf Kalzit-Rhomboederspaltflächen, auf denen mit einem Vickersdiamanten Ritzspuren und Druckfiguren erzeugt worden waren, läßt sich in Kristallbereichen, die im ungeätzten Zustand keine lichtoptisch auflösbaren Oberflächenveränderungen zeigen, ein kristallographisch orientierter Abbau nachweisen. Es entstehen Ätzgrabensysteme im druckgespannten Bereich um die Spur bzw. Eindringfigur. Die einzelnen Ätzgräben sind je nach der Spurorientierung nach Rhomboederkanten oder Zwillingslamellen ausgerichtet. Die Ausbildung beider Ätzgrabensysteme ist an eine Mindestritzlast gebunden, die weitgehend von der Spurorientierung abhängt. Die einzelnen Ätzgräben zeigen in ihrem Verhalten gegenüber Änderung der Ätzdauer und Konzentration des Lösungsmittels weitgehende Übereinstimmung mit den isoliert auf der gesamten Spaltfläche auftretenden Ätzmerkmalen. Die Normalabstände benachbarter Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung sind von der Ätzzeit, Konzentration und Drucklast unabhängig, während die Dichte der Ätzgräben in Zwillingslamellenrichtung mit steigender Drucklast zunimmt. Es wird gezeigt, daß letztere Ätzgräben mit dem Mechanismus der mechanischen Zwillingsbildung in Zusammenhang stehen.

Einleitung

Im I. Teil der Arbeit wurde gezeigt [1], daß man durch Anätzen von unverformten Kalzit-Rhomboederspaltflächen die *auf* der Spaltfläche gelegenen ätzempfindlichen Störstellen infolge Ätzgrubenbildung nachweisen und ihre Flächendichte bestimmen kann. Es handelt sich

* Teile dieser Arbeit sind einer Dissertation (I. Hanke, geb. Schösser, Diss. Univ. Graz, 1959) entnommen.

dabei um Störstellen, die einerseits auf das Wachstum zurückgehen und die andererseits durch den Spaltvorgang erzeugt werden können. Ein durch die beiden Typen möglicher Unterschied im Abbau, wie er z. B. an LiF-Kristallen bei Wahl geeigneter Ätzmittel in Erscheinung tritt [2], konnte durch Verwendung von Essigsäure an Kalkspat nicht gefunden werden. Von G. PFEFFERKORN liegen elektronenmikroskopische Untersuchungen der Deformation von Kalkspat vor [3], die darin bestehen, daß Spaltflächen durch Reiben mit Papier und dergleichen geritzt und nachträglich zur Sichtbarmachung der Deformation geätzt wurden. Der Nachteil dieser Methode liegt in der Nichtreproduzierbarkeit der Versuchsbedingungen.

Zweck der vorliegenden Arbeit war es, durch Anätzen von Spaltflächen, auf denen unter definierten Bedingungen Vickers-Ritzspuren und -Eindringfiguren hergestellt worden waren, einen Anhaltspunkt über die Fehlstellenverteilung im Kristallinneren und die Erzeugung neuer Fehlstellen durch die Deformation zu gewinnen. Es ist anzunehmen, daß durch den Deformationsvorgang an Fehlstellen unter der Spaltfläche eine Erweiterung der Gitterstörung hervorgerufen wird, welche sich bis zur Oberfläche ausdehnt und ebenfalls zu einem bevorzugten Abbau führen kann. Derartige Versuche wurden in beschränktem Ausmaße an bruchfreien Spuren zur Untersuchung des mikroplastisch verdrängten Materials ausgeführt. Sie führten zur Entdeckung eines Ätzgrabensystems, für dessen Zustandekommen bisher die in der Spurumgebung vorhandene druckgespannte Oberflächenschicht verantwortlich gemacht wurde [4]. Dazu wird weiter unten Stellung genommen.

Ritz- und Druckverfahren

Für die Erzeugung von Mikroritzfurchen und Eindringfiguren stand eine bereits von F. PUCHEGGER verwendete Ritzapparatur zur Verfügung. Sie besteht, wie in Abb. 1 *a* und 1 *b* gezeigt, im wesentlichen aus einem Wagen, der die Ritzprobe trägt und einem drehbar gelagerten Waagebalken, der an einem Ende das Ritzwerkzeug trägt und am anderen Laufgewichte, die das Gewicht des Ritzdiamanten und seiner Fassung ausgleichen. Der Waagebalken ist auf Schneiden so empfindlich gelagert, daß er auf eine Belastung des Ritzwerkzeuges von 0,01 p noch gut reagiert. Da keine kleineren Lasten als 0,1 p verwendet wurden, war die Empfindlichkeit hinreichend. An der Vorderseite des Wagens ist ein Zugfaden befestigt, der auf eine mittels Synchronmotor angetriebene Trommel gewickelt wird. Die Bewegung des Wagens kann mit den Geschwindigkeiten 10^{-5} cm/sek, 10^{-4} cm/sek, 10^{-3} cm/sek und größeren erfolgen. Die Probe ist auf dem Wagen drehbar angeordnet, so daß sie in jeder beliebigen Orientierung unter der Spitze des Ritzwerkzeuges hinwegbewegt werden kann. Die Orientierungseinstellung kann auf $\pm 1^0$ genau erfolgen.

Die Ritzgeschwindigkeit wurde bei den vorliegenden Versuchen konstant gehalten und betrug $2 \cdot 10^{-3}$ cm/sek. Vergleiche zwischen

dem Verhalten von Spuren beliebiger Orientierung gegenüber dem Einwirken von Essigsäurelösungen sind nur bei konstanter Ritzgeschwindigkeit sinnvoll, weil diese die Spurgrabentiefe und die Größe des Spannungshofes um die Spur bestimmt. Die Ursache dafür ist, daß, wie

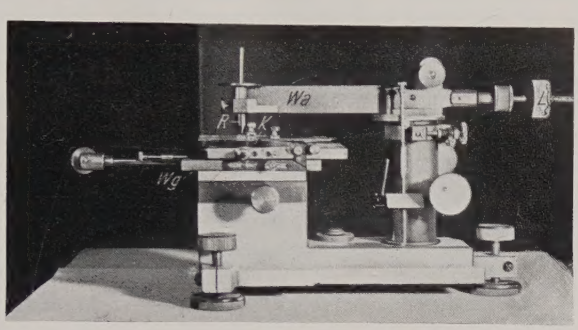

Abb. 1 *a*. Seitenansicht der Ritzmaschine

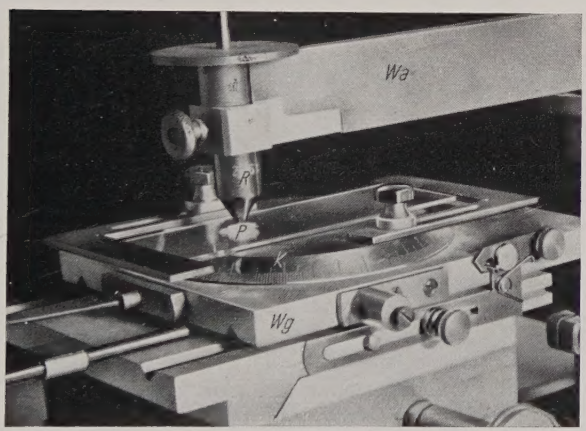

Abb. 1 *b*. Waagebalken mit Ritzkörper, Wagen mit Kreisscheibe *K* und Probe *P*. *R*... Ritzkörper, *Wg*... Wagen, *Wa*... Waagebalken, *L*... Laufgewichte

Smekal und Klemm an Silikatgläsern, Quarz und Korund gezeigt haben, bei mikroplastischen Fließvorgängen die Energie, die zur athermischen Überwindung der chemischen Bindekräfte aufgewendet werden mußte, beim Erstarren des verdrängten Materials in Form von Wärme frei wird [5]. Diese Wärme wird rasch abgeführt und bewirkt die Ausbildung eines Spannungshofes längs der Spur, der einen zirka fünfmal größeren Oberflächenbedarf als die Spur selbst hat. Wird der Ritzkörper schnell über die Probe bewegt, so kann ein Teil des plastisch verdrängten Materials in den Graben zurückfließen, während bei sehr

kleinen Ritzgeschwindigkeiten diese Möglichkeit nicht gegeben ist, da sich das Material schneller verfestigt als der Ritzkörper über die Fläche wandert. Daher nehmen Grabentiefe und Spannungshof bei kleinen Ritzgeschwindigkeiten zu. Die wahre Ritztiefe wird nur von der Belastung bestimmt und ist von der Verformungsgeschwindigkeit unabhängig, was sich für Kalzit in ähnlicher Weise wie für Glas zeigen läßt [6].

Dieselbe Apparatur konnte auch zur Erzeugung von quasistatischen Eindringfiguren verwendet werden. Zu diesem Zweck wurde der Wagen mit der Probe arretiert und der belastete Vickersdiamant mit Hilfe eines Untersetzungsgetriebes äußerst vorsichtig auf die Probe aufgesetzt. Um definierte Vergleichsbedingungen zu erzielen, wurde das Druckwerkzeug jeweils 60 Sekunden auf der Probe stehen gelassen und dann vorsichtig entfernt.

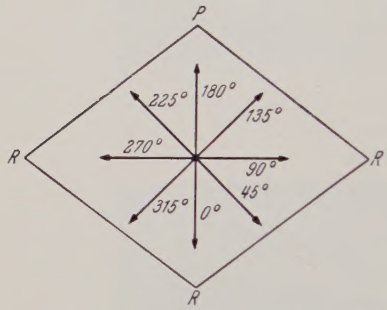

Abb. 2. Schema der Spurbezeichnung. Die Pfeile geben die Richtung der Diamantbewegung an. Daneben steht jeweils der zugeordnete Winkel

Als Versuchsmaterial dienten Rhomboederflächen von sehr gut durchsichtigen Kalkspatkristallen, die zumindest in kleinen Bereichen möglichst glatt und eben waren. Als Ritz- und Druckwerkzeug eignet sich vor allem für quantitative Untersuchungen die Vickersdiamantpyramide, weil sich mit ihr einerseits die zur Erzeugung von bruchfreien Ritzspuren notwendigen kleinen Kontaktflächen verwirklichen lassen, die in der Größenordnung einiger Quadratmikron liegen und andererseits bietet sie eine weitgehende Verschleißsicherheit. Der Oberflächenzustand der Härteprüfkörper wurde vor ihrer Inanspruchnahme und in regelmäßigen Abständen während der Untersuchung mikrointerferometrisch überprüft. Die Prüfkörper wurden in dreikantigen Fassungen fixiert, die es gestatteten, die Ritzkörper zu vertauschen und sie stets wieder in der gleichen Orientierung am Waagebalken der Ritzapparatur zu befestigen. Die Ritzwerkzeuge konnten auch in der Fassung gedreht und in jeder beliebigen Stellung fixiert werden, so daß nach Wunsch jede beliebige Diamantlage relativ zur Spaltfläche und Ritzrichtung eingestellt werden konnte.

Die Ritz- und Drucklasten lagen zwischen 0,1 p und 1 p. Sie ergeben bei Division durch die Kontaktfläche Spannungen, die der chemischen Bindefestigkeit nahekommen. Diese liegt für Kalzit bei 1,3 p/μ^2, das heißt es kommt zu einem plastischen Fließen des Materials.

Die Einwirkung der Essigsäurelösungen auf die deformierten Proben wurde in derselben Weise wie an unverformten Spaltflächen erreicht [1]. Die Ätzzeit betrug in der Regel nur 2 bis 10 Sekunden, weil bei längeren Ätzintervallen die Ätzgräben zusammenwachsen und damit ihre Ausmessung behindern. Die Konzentration der Essigsäurelösung wurde

konstant gehalten und betrug 0,02 Gewichtsprozente. Die Beobachtung der Oberflächenveränderungen nach dem Ritz-, Druck- und Ätzvorgang erfolgte ebenfalls mit den im I. Teil angegebenen lichtoptischen Methoden, nämlich Phasenkontrast, Schräglicht und Interferenz.

Wegen der Richtungsabhängigkeit der Mikrobruchformen und der Ätzgrabensysteme auf Kalzitspaltflächen empfiehlt es sich, zur Angabe der Orientierung und des Richtungssinnes von Ritzfurchen an den eingeführten Bezeichnungen festzuhalten [4]. Spuren, die von der Polecke zur gegenüberliegenden Randecke gezogen werden, erhalten die Bezeichnung 0^0, die der Gegenrichtung 180^0. Demnach lassen sich alle Spuren, die in beliebiger Richtung erzeugt werden, durch die Angabe des Winkels charakterisieren, um den die Ausgangsrichtung 0^0 im positiven Sinn gedreht werden muß, um in die entsprechende Ritzrichtung zu weisen. Die Bedeutung dieser Bezeichnungsweise geht aus Abb. 2 hervor.

Ätzgrabenbildung an Spuren der Richtung 0^0 und 180^0.

Unterwirft man Rhomboederspaltflächen, auf denen bei verschiedener Belastung Vickers-Ritzfurchen in Richtung 0^0 oder 180^0 hergestellt wurden, während einer kurzen Zeit dem Angriff einer verdünnten Essigsäurelösung, so beobachtet man, daß die Spur ausrundend vertieft

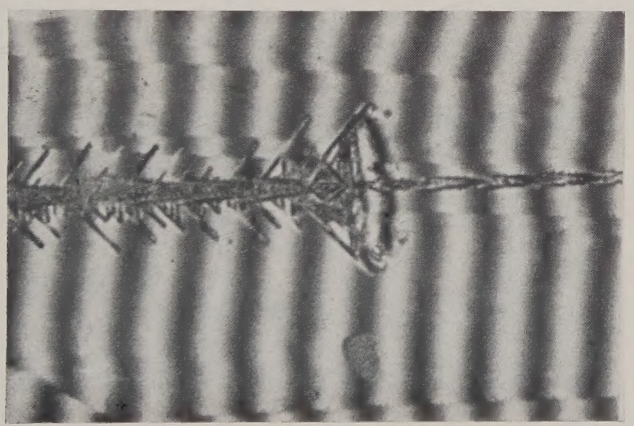

Abb. 3. 0,1 p und 1,1 p-Spur auf Kalzit. Die Probe wurde 5 sek in 0,02%-iger Essigsäurelösung geätzt. Interferogramm, Vergr. 1100 : 1

wird. Die Spurwälle werden sofort abgetragen, was für eine Amorphisierung des verdrängten Materials spricht. Diese von Smekal postulierte Amorphisierung der Materie wurde von Strunz auch für sublichtmikroskopische Bereiche bestätigt [7]. Die Spurgrabenwände erscheinen erheblich aufgerauht, was bisher auf einen unregelmäßigen Ätzangriff zurückgeführt wurde. Nach den durch vorliegende Arbeit gewonnenen Erkenntnissen läßt sich die Aufrauhung dadurch erklären, daß sich die Ritzgrabenwände aus einer Anhäufung von kristallo-

graphisch orientierten Ätzgrübchen zusammensetzen. Der Abbaumechanismus in der Spurnachbarschaft hängt von der gewählten Belastung ab. Bei sehr kleinen Ritzlasten lassen sich in der Spurumgebung nach dem Ätzangriff lichtoptisch keine Oberflächenveränderungen regi-

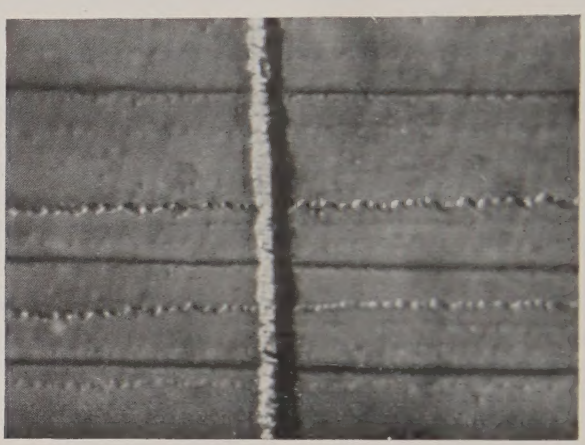

Abb. 4. 0,1 p-Spur nach 30 sek Ätzangriff. Keine Ätzgräben in der Spurumgebung. Schräglicht, Vergr. 1500 : 1

strieren, während bei größeren Lasten und gleicher Ätzzeit ein kristallographisch orientiertes Ätzgrabensystem ausgebildet wird, dessen individuelle Ätzgräben parallel zu Rhomboederkanten ausgerichtet sind. Diese

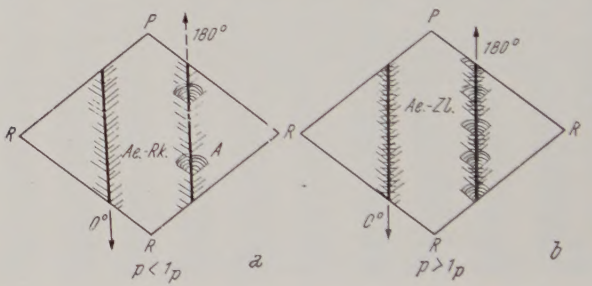

Abb. 5 *a*. Schematische Darstellung der Ätzgrubenverteilung an Spuren der Richtung 0° und 180° bei Ritzlasten, die kleiner als 1 p sind. *P* ... Polecke, *R* ... Randecken, *A* ... Aussplitterung, *Ae.-Rk* ... Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung

Abb. 5 *b*. Ätzgräbenanordnung bei Ritzlasten größer 1 p. *Ae.-Zl* ... Ätzgruben in Zwillingslamellenrichtung

Erscheinung wird in Abb. 3 wiedergegeben, in der eine 0,1 p Spur und in ihrer Verlängerung eine 1,1 p Spur nach einer Ätzdauer von 5 Sekunden dargestellt wird. Bei Verlängerung der Ätzdauer tritt lediglich eine Verbreiterung und Vertiefung des 0,1 p Spurgrabens auf, aber keine orientierten Ätzgruben in der Spurumgebung (Abb. 4). Völlig analog ist das Verhalten von Spuren der Gegenrichtung.

Der Winkel den die Ätzgräben miteinander einschließen, konvergiert gegen die Randecke, was in den Abb. 5 *a*, 5 *b* und 6 gezeigt wird.

Die Ausbildung der fischgrätenartig angeordneten Ätzgräben ist an eine Mindestritzlast gebunden, die sich für diese beiden Spurrichtungen (0^0 und 180^0) zu 0,3 p $\pm$ 0,05 p ergibt. Vergleicht man diese zur Ätz-

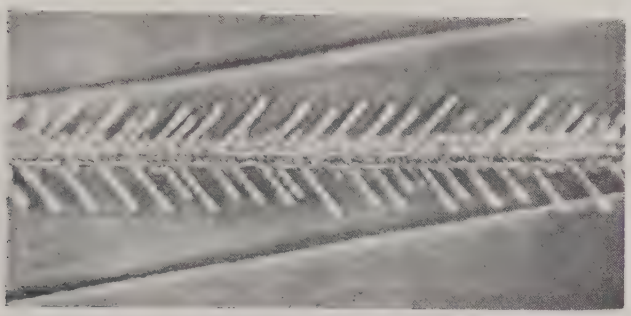

Abb. 6. Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung an einer 0,7 p-Spur der Richtung 0^0. Ätzdauer: 5 sek. Negativer Phasenkontrast, Vergr. 1100 : 1

grabenbildung führende Grenzlast mit der zur Bruchbildung notwendigen, so ergibt sich, daß sie für Spuren der Richtung 0^0 weit unter der Bruchgrenze, für solche der Richtung 180^0 über der Bruchgrenze

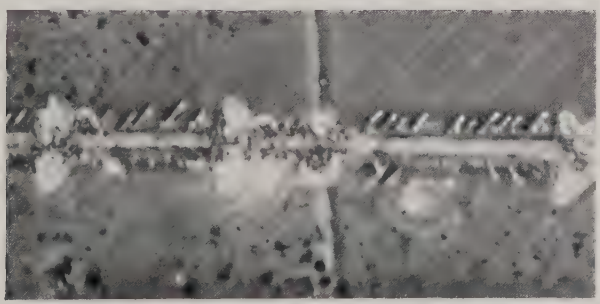

Abb. 7. Geätzte Ritzspur der Richtung 180^0. Ritzlast: 0,6 p; Ätzdauer: 2 sek. Negativer Phasenkontrast, Vergr. 1100 : 1

liegt. Demnach kann zwischen den beiden Belastungsgrenzen kein unmittelbarer Zusammenhang bestehen, was später noch diskutiert wird.

Die Spurgrabentiefe einer 0,3 p Spur liegt im ungeätzten Zustand bei 400 Å und wächst nach 2 sek Ätzzeit auf 2000 Å an. Die zur Entstehung der Ätzgräben führenden Fehlstellen müssen also im Spannungshof der Spur gelegen sein, der durch die erwähnten Dimensionen begrenzt wird.

Wird die Belastung des Ritzwerkzeuges gesteigert, so nehmen Spurtiefe und -durchmesser sowie die Breite des leicht angreifbaren Ober-

flächenstreifens zu beiden Seiten der Spur stetig zu. An Spuren der Richtung 180° setzen gleichzeitig muschelförmige Aussplitterungen in der Spurumgebung ein (Abb. 7). In den Gebieten der Spurnachbarschaft, wo Aussplitterungen vorhanden sind, fehlen die Ätzgräben oder sie sind wegen der mit der Bruchbildung verbundenen Aufrauhung nicht zu registrieren. Überschreitet die Ritzbelastung eine bestimmte obere Grenze, so treten zwischen den beiden Spurtypen wieder deutliche Unterschiede auf. An Spuren der Richtung 180° liegen die Aussplitterungen so dicht, daß kein orientierter Abbau mehr erkennbar wird. Diese obere Belastungsgrenze liegt bei zwei Pond. An Spuren der Richtung 0°, die mit einer größeren Belastung als 1 p gezogen werden, überlagert sich dem Ätzgrabensystem in Rhomboederkantenrichtung ein zweites, das aus Ätzgräben zusammengesetzt ist, die parallel zur längeren Rhombendiagonale verlaufen (Abb. 3), also normal zur Spur ausgerichtet sind. Dieses Ätzgrabensystem wird später noch eingehend behandelt. Die Verteilung beider Ätzgrabensysteme um die Spur wird in den Abb. 5 *a* und 5 *b* dargestellt.

Geometrie der Ätzgräben und ihr Verhalten in Abhängigkeit von der Ätzdauer und Konzentration

Wie schon in einer früheren Arbeit angedeutet [8], zeigt ein Vergleich zwischen den im Einflußstreifen einer Ritzspur auftretenden Ätzgräben und den isoliert auf der gesamten Spaltfläche verteilten

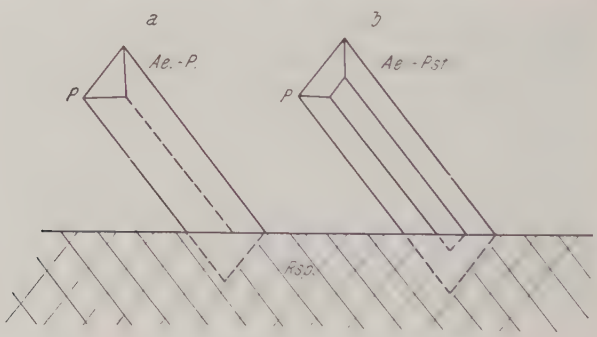

Abb. 8. Schematische Darstellung eines pyramiden- und pyramidenstumpfförmigen Ätzgrabens an einer Spur der Richtung 0°. *P*... Polecke, *Ae.-P*... Ätzpyramide, *Ae.-Pst*... Ätzpyramidenstumpf, *Rsp*... Ritzspur

rhombischen Ätzpyramiden, daß es sich im Grunde um dieselben Abbauformen handelt. Es treten an Stelle der rhombischen Basisformen Rhomboide als Umrisse auf, was sich vielleicht auf eine Steigerung der Lösungsgeschwindigkeit durch den Spannungsgehalt in der Spurnachbarschaft zurückführen läßt. Andererseits — und das ist die wahrscheinlichere Erklärung — lassen sich die Ätzgräben als Folge von Ätzgruben mit rhombischer Basis betrachten, mit denen sie in ihrem

Verhalten bei Änderung der Ätzdauer und Konzentration qualitativ gut übereinstimmen.

Bei Essigsäurekonzentrationen über 0,05% sind die Ätzgräbenwände glatt, während bei Konzentrationen unter 0,05% eine deutliche Treppenstruktur an den Ätzgräbenwänden nachgewiesen werden kann. Die Schichtabstände bewegen sich in Übereinstimmung mit den an isolierten Ätzgruben gemessenen, in der Größenordnung von 1000 Å. Die Ätzgräben können entweder die Form von Pyramiden mit verlängerter Dachkante haben oder die Form von Pyramidenstümpfen, deren Grund- und Deckfläche Rhomboide sind, wobei allerdings der Verlauf an der Grenze Spurgraben-Ätzgraben mit lichtoptischen Me-

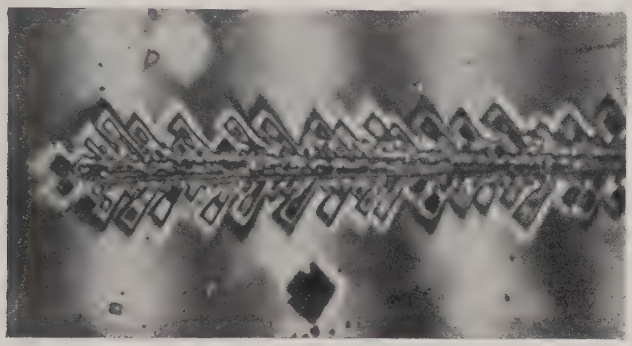

Abb. 9. Interferogramm einer 0,8 p-Spur der Richtung 0°. 30 sek in 0,02%-iger Essigsäurelösung geätzt. Vergr. 900 : 1

thoden nicht eindeutig zu bestimmen ist. Beide erwähnten Formen werden in Abb. 8 und 9 dargestellt. Dem Interferogramm, Abb. 9, ist auch zu entnehmen, daß die Ätzgräben an ihrem der Spur abgewendeten Ende stets tiefer sind als unmittelbar an der Spur.

Um alle Daten, die zu einer eindeutigen Beschreibung der Ätzgräben erforderlich sind, zu erhalten, müßte man relativ große derartige Gräben herstellen können. Diese wachsen jedoch wegen ihres geringen gegenseitigen Abstandes ineinander, so daß ihre Ausmessung unmöglich wird. Aus kristallographischen Gründen ist zu erwarten, daß es sich um dieselben Abbauformen handelt. Nach dem ersten kurzen Ätzangriff lassen sich vorwiegend Pyramiden registrieren, deren Tiefe von der Ritzlast wesentlich beeinflußt wird, während bei höheren Ätzzeiten innerhalb der meisten Ätzgräben wieder eine Bodenbildung einsetzt, wie an den isolierten Ätzgruben.

Für die Abhängigkeit der Tiefenzunahme von der Ätzzeit und Belastung ergibt sich im wesentlichen, daß zu Beginn des Abbaues, je nach der Ritzlast, verschiedene Tiefen zwischen 400 Å und 1000 Å verzeichnet werden können. Mit zunehmender Ätzzeit kommt, wegen der im Vordergrund stehenden Bodenbildung in verschiedenen Tiefen, der

Abbau normal zur Spaltfläche zum Stillstand. Daher verschwinden bei hohen Ätzzeiten die Unterschiede zwischen den Grabentiefen bei Spuren verschiedener Belastung (vergl. Abb. 9 und 10).

Die Unterschiede zwischen den Ätzgrabensystemen von Spuren verschiedener Belastung beruhen hauptsächlich im Raumbedarf auf der Spaltfläche, der, kurze Ätzzeiten vorausgesetzt, fünfmal so groß ist wie die Ritzbahn. Bei höheren Ätzzeiten läßt sich die Ausdehnung der Spur und des Ätzgrabensystems nicht gesondert verfolgen und daher

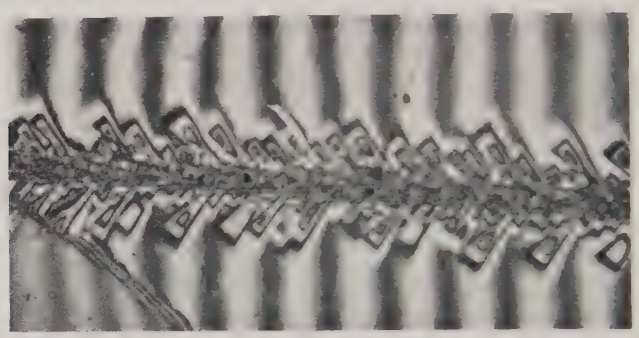

Abb. 10. Interferogramm einer 1 p-Spur. 30 sek in 0,02%-iger Lösung geätzt. Ätzgräben haben dieselbe Tiefe wie die der 0,8 p Spur. Vergr. 900 : 1

bleibt es unbekannt, ob sie in demselben Maße zunehmen. Vollkommen unabhängig von Ätzdauer, Konzentration und Ritzbelastung ist die Zahl der Ätzgräben pro Einheit der Spurlänge, was auf eine für alle Spaltflächen bzw. Kalzitkristalle charakteristische Eigenschaft schließen läßt und im nächsten Abschnitt näher behandelt wird.

Zum Ätzgrabensystem in Rhomboederkantenrichtung

Die Ätzgrabenabstände an Spuren der Richtung 0^0 und 180^0 können, wie die Messung zeigt, abgesehen von statistischen Schwankungen, als konstant betrachtet werden. Bei kurzen Ätzzeiten lassen sich die in der Längsrichtung durch die Ätzgräben gelegten Symmetralen mit der Lage der Gitterstörung identifizieren, die zur orientierten Materialablösung in Form von Ätzgräben führt. Die Ausmessung der gegenseitigen Normalabstände dieser Symmetralen liefert einen Anhaltspunkt über die Verteilung grober Fehlschichten parallel zu Rhomboederspaltflächen. Die in Abhängigkeit von der Ritzbelastung gemessenen Abstände für Spuren der Richtung 0^0 und 180^0 sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Die Abstandsangaben für Spuren der Richtung 180^0 beziehen sich auf die aussplitterungsfreien Gebiete. Wie aus den Werten hervorgeht, sind die Abstände von der Ritzbelastung annähernd unabhängig und für beide Spurrichtungen, die erhebliche Unterschiede in ihrem mikrospröden Verhalten zeigen, fast gleich. Es muß demnach bei der pla-

stischen Deformation eine Spannungsverteilung in Verbindung mit den Fehlschichten vorhanden sein, die parallel zu den Rhomboederkanten die größten Gitterstörungen bewirkt. Eine diesbezügliche Theorie steht noch aus.

Tabelle 1. Normalabstände benachbarter Ätzgräben für Spuren der Richtung 0^0 und 180^0 in Abhängigkeit von der Last

Belastung (p)	Spurrichtung 0°		Spurrichtung 180°	
	Mittelwert (μ)	Streuung (μ)	Mittelwert (μ)	Streuung (μ)
0,3	1,7	1 bis 4	1,4	1 bis 3
0,4	1,8	1 bis 4	1,5	1 bis 3
0,6	1,7	1 bis 5	1,8	1 bis 3,5
0,8	1,8	1 bis 4,5	1,8	1 bis 4
1,0	1,9	1 bis 5	1,7	1 bis 4

Wie eingangs erwähnt, wurde als Entstehungsursache der nach Rhomboederkanten orientierten Ätzgräben in der Nachbarschaft von 0^0 und 180^0 Spuren die dort vorhandene druckgespannte Schicht betrachtet, weil sich die Ätzgräben in einem Gebiet verteilen, das auf Grund theoretischer Überlegungen dem Spannungshof um den deformierten Bereich entspricht [4]. Es ist unmittelbar einzusehen, daß die Breite des chemisch leicht angreifbaren Oberflächenstreifens als Maß für die Ausdehnung des Spannungshofes gelten kann. Wäre jedoch die druckgespannte Schicht allein für den bevorzugten Abbau verantwortlich, so müßte eine einigermaßen einheitliche Abtragung in der gesamten gespannten Oberflächenschichte erfolgen. Das Vorhandensein dieser Schicht allein kann nicht die Ursache für die Ausbildung von Ätzgräben, die in durchschnittlich gleichen Abständen der Größenordnung einiger Mikron längs der Spur auftreten, sein. Es müssen noch andere Faktoren für die Entstehung des Ätzgrabensystems verantwortlich sein, nämlich lokale Spannungsüberhöhungen (oder feine Spalten) in der druckgespannten Schicht. Die lokalen Spannungsspitzen könnten, wegen der Orientierung der Ätzgräben, durch die zu beiden Seiten angrenzenden Rhomboederspaltflächen hervorgerufen werden, da Kristallspaltflächen mit Flächen erhöhter Störstellendichte identifiziert werden können. Für diese Annahme spricht die Tatsache, daß bei der mechanischen Zwillingsbildung Spaltrisse parallel zur Probenoberfläche entstehen, deren Abstand in derselben Größenordnung liegt (1 bis 4 μ). Daraus wurde geschlossen, daß benachbarte Rhomboederspaltflächen einen Mindestabstand von 1 μ besitzen [4]. Weiters wird die obige Annahme dadurch gestützt, daß ein Kristall nicht längs beliebigen Ebenen geringster Trennarbeit spaltbar ist, sondern daß am Spaltvorgang Störstellen beteiligt sind, die die Bruchfortpflanzung längs dieser Ebenen begünstigen, weil andernfalls wesentlich höhere Energien für die Spaltung aufgewendet werden müßten. Dabei erfolgt nach Untersuchungen an Diamant

die Spaltung ungefähr durch die Mitte der gestörten Gitterschicht, weil an zusammengehörigen Spaltufern dieselben Ätzmerkmale auftreten [9]. Da im ersten Teil der Arbeit gezeigt wurde, daß Fehlschichten in Abständen von 0,1 μ auftreten, können nicht beliebige Störstellen den Spaltvorgang unterstützen, sondern nur solche einer bestimmten Type, die wegen der Abstände von Rhomboederspaltrissen und Ätzgräben in Abständen von 1 bis 4 μ vorkommen. Es könnte sich dabei um eine Anhäufung grober Gitterstörungen oder eine Versetzung von Gitterebenen handeln, die bei genügend hoher Beanspruchung die Öffnung von Spaltrissen parallel zur Probenfläche und die Bildung von Ätzgräben längs der beiden anderen Spaltsysteme bedingen können.

Nimmt man an, daß die bei der Öffnung eines Spaltrisses bzw. bei der Spaltung beteiligten Kerbstellen mit denen vergleichbar sind, die die Ätzgräben an Spuren parallel zur kürzeren Rhombendiagonale hervorrufen, so geben die Abstände benachbarter Ätzgräben eine Vorstellung von der Spaltflächenverteilung im Kristallinneren.

Nach neueren Untersuchungen an verschiedenen Kristallen, an denen bei plastischer Deformation und gleichzeitiger Erhitzung ein Gleiten in sublichtmikroskopischem Ausmaße längs ausgezeichneten Kristallebenen einsetzt [10], die durch Anätzen sichtbar gemacht wird, wäre in Erwägung zu ziehen, ob die hier nachgewiesenen Ätzgräben mit einem Gleitvorgang längs Rhomboederflächen in Zusammenhang stehen, die gleichzeitig Spaltflächen des Kristalls sind. Die Temperaturerhöhung erfolgt hier durch die Wärmeabgabe bei der Erstarrung des plastisch verdrängten Materials. Damit wäre in gleicher Weise die Möglichkeit gegeben, die Spaltflächenverteilung infolge Ätzgrubenbildung zu ermitteln.

Ätzgräben in Zwillingslamellenrichtung

Zur Klärung der im letzten Abschnitt behandelten Probleme ist es naheliegend Ätzversuche an Spuren auszuführen, die parallel zu den dort beschriebenen Ätzgräben verlaufen, also an Spuren der Richtung 52,5° bzw. 307,5°. Wider Erwarten treten an diesen Spuren keine nach Rhomboederkanten orientierten Ätzgräben auf, woraus geschlossen werden kann, daß die durch den Deformationsvorgang in diesen Richtungen auftretenden Spannungen die zur Ätzgrabenbildung erforderliche Mindestgröße nicht erreichen. An letzteren Spuren wird ein Ätzgrabensystem ausgebildet (11 *a*), dessen einzelne Ätzgräben parallel zur längeren Rhombendiagonale, also in Richtung von Zwillingslamellen verlaufen, wie in Abb. 12 schematisch dargestellt wird.

Die Ätzgräben sind nicht symmetrisch zur Spur angeordnet, sondern liegen an Spuren beider Richtungen vorwiegend auf dem der Polecke zugewendeten Spurufer. Die gleiche Verteilung an beiden Spuren ist auf Grund ihres spiegelbildlichen Verhaltens zu erwarten.

Es ist aus der Literatur bekannt, daß durch Anätzen deformierter Kalzitspaltflächen, die keine lichtoptisch auflösbaren Zwillingslamellen aufweisen, Zwillingslamellen elektronenmikroskopisch nachgewiesen

werden können. Diese durch Anätzen sichtbar gemachten Zwillingslamellen sind mit diesen Ätzgräben nicht identisch. Druckzwillinge ragen stets aus der Spaltfläche heraus, während die Ätzgräben, wie Abb. 11 *b* zeigt, Vertiefungen in der Spaltfläche darstellen.

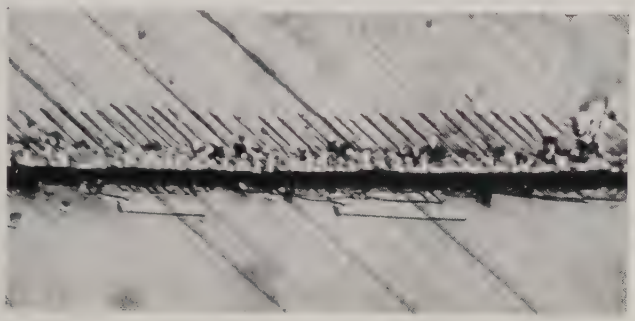

Abb. 11 *a*. Ätzgräben in Zwillingslamellenrichtung an einer 307°-Spur. Ritzlast 1 p, 2 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt. Schrägbeleuchtung, Vergr. 1500 : 1

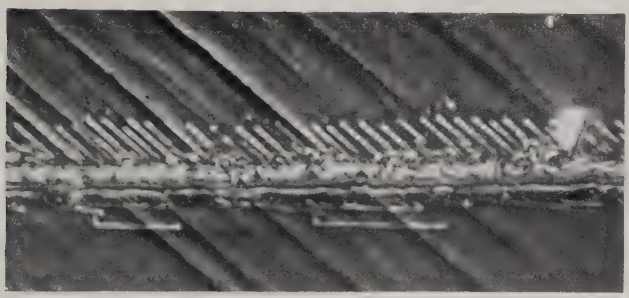

Abb. 11 *b*. Wie Abb. 11 *a*, jedoch negativer Phasenkontrast

Das Ätzgrabensystem in Zwillingsrichtung unterscheidet sich in mehreren Punkten von dem in Rhomboederkantenrichtung. Die Ätzgräben sind einseitig längs der Spur verteilt, so wie die an diesen Spuren vorkommenden Zwillingslamellen was sich auf die kristallographische Lage der Zwillingsebene zurückführen läßt, zufolge der eine auf der entgegengesetzten Seite entstehende Lamelle unter die Spur hineinlaufen müßte, wo der herrschende Druck das Umklappen der Idealgitterbereiche in die Zwillingsstellung verhindert [4]. Da die Ätzgräben mit dem Mechanismus der Zwillingsbildung in Zusammenhang stehen, muß für sie dasselbe zutreffen. Eine weitere Ursache für die einseitige Verteilung der Ätzgräben ist in der asymmetrischen Spannungsverteilung um die Spur zu suchen, die durch die Anisotropie des Kalzitgitters gegeben ist.

Für die Ausbildung des Ätzgrabensystems ist eine Mindestritzlast von 0,2 p $\pm$ 0,05 p erforderlich. Bei kleineren Lasten treten in der Spurumgebung keine lichtoptisch auflösbaren Oberflächenveränderungen auf. Die Normalabstände benachbarter Ätzgräben sind von der Ritzlast weitgehend abhängig. Die Dichte der Ätzgräben nimmt mit steigender Ritzlast zu. Bei kleinen Ritzlasten (0,2 bis 0,5 p) liegen die Abstände in der Größenordnung 20 bis 50 Mikron und erreichen bei 1 p Belastung einen Mittelwert von $1{,}2 \pm 0{,}4\,\mu$. Die Zunahme der Ätzgrabendichte mit steigender Ritzlast wird durch die Vergrößerung des Spannungshofes bedingt. Es gelangen dadurch immer mehr Störstellen, die in verschiedenen Tiefen unter dem Spaltflächenniveau liegen, in das Gebiet der gespannten Gitterschichte und können dort lokale Spannungsspitzen hervorrufen, die zur Zwillingsbildung hinreichen, aber nicht die Bruchfortpflanzung längs Ebenen geringster Trennarbeit begünstigen. Da der Spannungshof einer 0,2 p-Spur bis in eine Tiefe von zirka 1000 Å reicht, ist damit zu rechnen, daß in wesentlich geringeren Tiefen keine Fehlstellen liegen, die Druckzwillinge hervorrufen, was mit dem gemessenen Abstand störstellenfreier Schichten in guter Übereinstimmung steht.

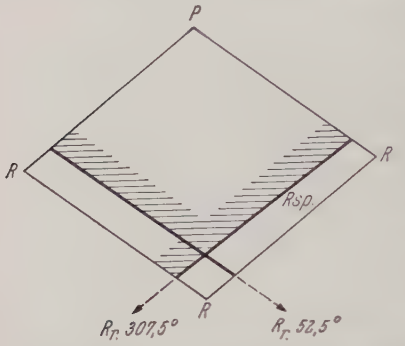

Abb. 12. Schematische Darstellung der Ätzgrabenanordnung an 52,5° und 307,5°-Spuren. *Rsp.* ... Ritzspur

Das Verhalten der Ätzgräben bei Änderung der Ätzzeit und Konzentration entspricht dem der Ätzgräben an Spuren der Richtung 0° bzw. dem der isoliert auftretenden Ätzrhomben völlig. Sie lassen sich ebenfalls als diskrete Folge von Ätzgruben mit rhombischer Basis ansprechen.

An Spuren der Gegenrichtung, also 127° und 232,5°, die — als Vektoren aufgefaßt — eine Komponente in Richtung 180° besitzen, treten bereits bei geringen Ritzlasten starke Ausplitterungen auf, die sich ebenfalls auf die Wirksamkeit von Fehlstellen in einigen hundert Å unter der Spaltfläche zurückführen lassen. Ätzgräben in Zwillingslamellenrichtung treten nur in aussplitterungsfreien Gebieten auf, bei hohen Lasten auch solche in Rhomboederkantenrichtung.

Die Frage, ob die Ätzgräben in Zwillingsrichtung mit der mechanischen Zwillingsbildung in Zusammenhang stehen, läßt sich nur durch Untersuchungen an relativ breiten und hohen Lamellen beantworten, die jedoch an Spuren parallel zu den Rhomboederkanten nicht zu erhalten sind. Mit zunehmender Ritzlast nimmt zwar die Lamellenbreite zu, aber sie rücken so eng aneinander, daß sie nicht mehr getrennt registriert werden können. Außerdem werden schmale Lamellen, die aus der Spaltfläche herausragen, wie Kanten, bevorzugt abgelöst und sind daher auch nach einem kurzen Ätzangriff nicht mehr nachzuweisen.

Relativ breite Lamellen werden an Ritzspuren ausgebildet, die fast parallel zur längeren Rhombendiagonale verlaufen. Unterzieht man diese Proben nach dem Ätzangriff einer interferometrischen Untersuchung, so

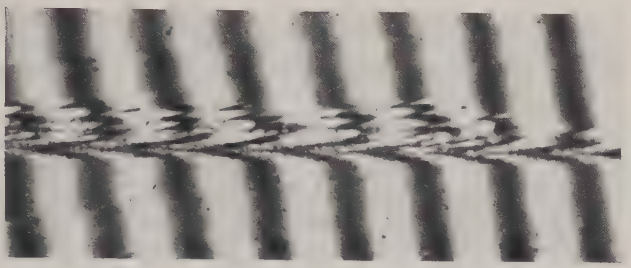

Abb. 13. Interferogramm einer 85°-Spur. Streifen normal zu den Ätzgräben bzw. Zwillingslamellen eingestellt. Vergr. 1100 : 1

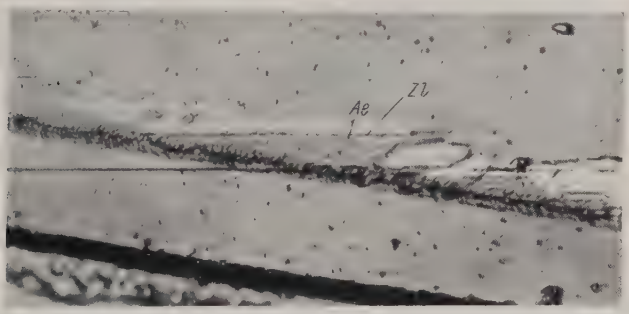

Abb. 14. Wie Abb. 13, jedoch Schrägbeleuchtung. *Ae*... Ätzgraben, *Zl*... Zwillingslamelle

ergeben sich Streifenauslenkungen im Sinne von Erhöhungen (= Rest der Zwillingslamelle) und Vertiefungen (= Ätzgraben) (Abb. 13). Da die Lamelle nach dem kurzfristigen Einwirken des Lösungsmittels nicht völlig abgetragen wird, läßt sich bei Schrägbeleuchtung die Lage der Ätzgräben relativ zur Zwillingslamelle und Spaltfläche bestimmen. Sie liegen, wie Abb. 14 und 15 *a*, *b* zeigen, zwischen Spur und Zwillingslamelle.

Wie den Abb. 15 *a*, *b* zu entnehmen ist, erfolgt die Ätzgrabenbildung in dem Kristallgebiet, das sich an die durch den Ort der Störstelle gelegten Zwillingsebene an der Randseite anschließt, was sich auf eine dort vorhandene Gitterstörung zurückführen läßt.

Ein Vergleich zwischen der Dichte von Zwillingslamellen und der bei gleicher Ritzlast auftretenden Ätzgräben zeigt, daß die Dichte der Ätzgräben wesentlich höher ist. Wegen des Zusammenhanges zwischen der Zwillings- und Ätzgrabenbildung ist anzunehmen, daß bei der Defor-

mation auch sublichtmikroskopische Zwillinge ausgebildet werden, deren Entstehungsort nachträglich durch Anätzen sichtbar gemacht wird.

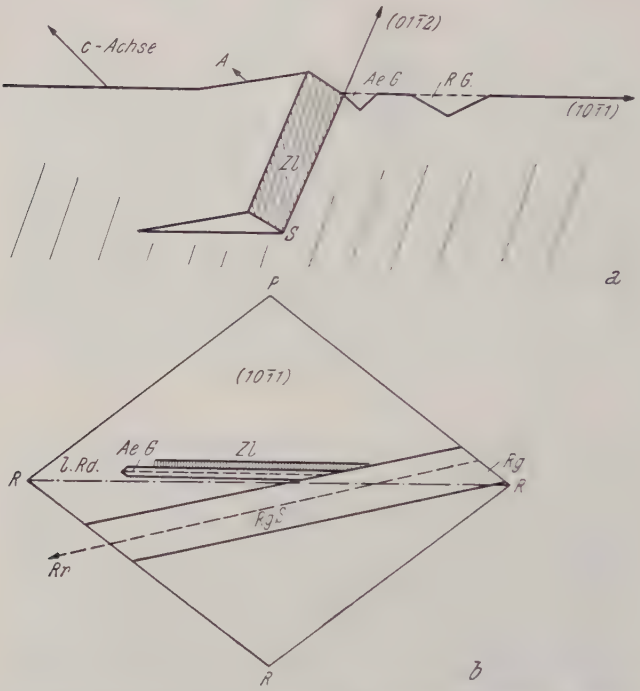

Abb. 15 *a*. Schematische Darstellung von Zwillingslamelle, Ätzgraben und Ritzspur. Schnitt längs einer Symmetrieebene.) *A* ... Aufwölbung, *Zl* ... Zwillingslamelle, *S* ... Lage der Störstelle, *Ae.G* ... Ätzgraben, *R.G.* Ritzgraben

Abb. 15 *b*. Schematische Darstellung von Zwillingslamelle, Ätzgraben und Ritzgraben. (Projektion in die Rhomboederfläche.) *Rgs* ... Ritzgrabensohle, *Aeg* ... Ätzgrabensohle, *Rr* ... Ritzrichtung, *l.Rd* ... längere Rhombendiagonale

Abbauvorgänge an Spuren beliebiger Orientierung

Alle Ätzmerkmale, die an Spuren beliebiger Orientierung auftreten, lassen sich auf die Ätzgrabensysteme in Rhomboederkanten- und Zwillingsrichtung zurückführen, wobei ihre Dichte und Verteilung von der Spurorientierung und Ritzlast abhängen. Die nachstehend beschriebenen Ergebnisse beziehen sich auf Spurgebiete, die keine Bruchvorgänge außer Zwillingslamellen zeigen. Wegen der komplexen Struktur der Ätzgrabenverteilung an Spuren, die merklich aus der Richtung der kürzeren Rhombendiagonale oder der Rhomboederkanten abweichen, werden die experimentellen Befunde für größere Winkelbereiche, in denen merkliche Unterschiede im Ätzverhalten zu registrieren sind, zusammengefaßt. Außerdem zeigen Spuren, die symmetrisch zur 0^0 Richtung liegen, wegen der Lage der Symmetrieebene ein spiegelbildlich gleiches Verhalten.

Die Ätzmerkmale an Spuren, die zwischen 330° und 30° liegen, lassen sich je nach der Belastung in zwei Gruppen einteilen: Bei Belastungen zwischen 0,3 p und 0,4 p treten nur Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung auf, deren Dichte unabhängig von der Ritzlast mit zunehmender Abweichung aus der 0° Richtung abnimmt, und zwar auf der der Polecke zugewendeten Spurseite stärker als auf der entgegengesetzten (Abb. 16, 17).

Abb. 16. Ritzspuren der Richtung 10° und 350° mit Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung. Ritzlast: 0,7 p, Ätzdauer: 2 sek, Schrägbeleuchtung. Vergr. 1500 : 1

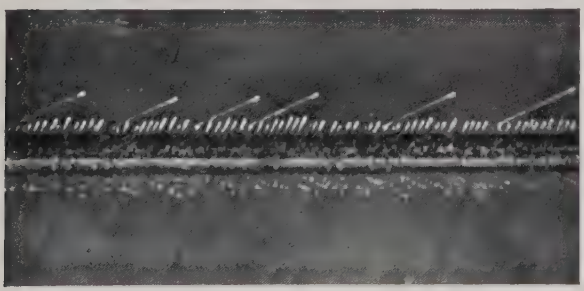

Abb. 17. 1 p-Ritzspur in Richtung 30°. Auf der Polseite fehlen bereits die Ätzgräben. Starke Ätzgrubenanhäufung auf diesem Spurufer. Negativer Phasenkontrast, Vergr. 1500 : 1

Bei Belastungen über 0,4 p erscheinen zusätzlich Ätzgräben in Zwillingsrichtung auf dem der Polecke abgewendeten Spurufer, nehmen aber nur einen äußerst schmalen Oberflächenstreifen ein (Abb. 17). Da die Belastung 0,4 p kleiner als die für diese Orientierung zur Bruchbildung führende Grenzlast ist, ist gezeigt, daß die Ätzgräben auch an die Existenz von sublichtmikroskopischen Zwillingslamellen gebunden

sein können. Die Lage beider Ätzgrabensysteme wird in Abb. 18 schematisch dargestellt.

An Ritzfurchen zwischen 30^0 und 70^0 bzw. 290^0 und 330^0 werden *nur* Ätzgräben in Zwillingslamellenrichtung ausgebildet, die gleichzeitig von der der Polecke abgewendeten Spurseite auf die gegenüberliegende wechseln. Es sind auch dann noch Ätzgruben auf der Randseite vorhanden, deren Charakter mit lichtoptischen Methoden nicht eindeutig zu bestimmen ist (Abb. 19, 20). Die Dichte der Ätzgräben nimmt mit der Ritzbelastung und Annäherung an die Rhomboederkantenrichtung zu und erreicht dort bei gegebener Belastung einen Maximalwert (Abb. 11). Die Verteilung wird in Abb. 21 dargestellt.

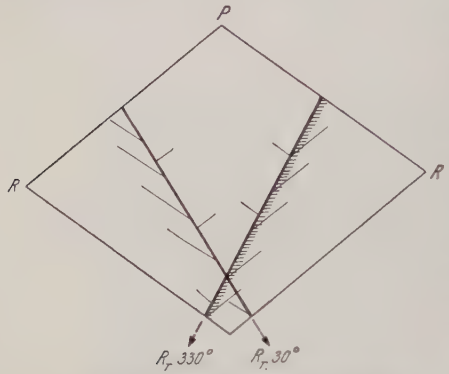

Abb. 18. Ätzgrabenverteilung an Spuren zwischen 330° und 30°. An der 30°-Spur nur Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung, Belastung kleiner 0,4 p. An der 330° auch Ätzgräben in Zwillingsrichtung, Belastung größer 1 p

An Spuren zwischen 70^0 und 90^0 bzw. 270^0 und 290^0 werden bereits nach der Deformation mit kleinen Lasten sehr breite und lange Zwillingslamellen ausgebildet, die mit einem Spaltriß par-

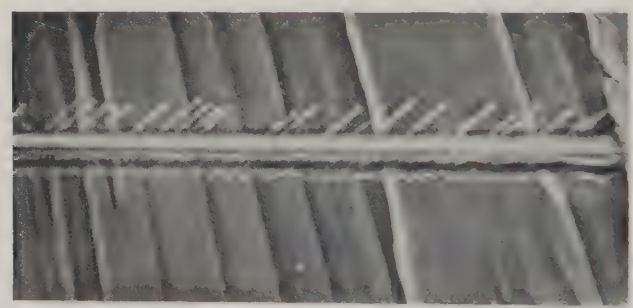

Abb. 19. 1 p-Spur der Richtung 50°, 2 sek in 0,02%-iger CH_3COOH geätzt. Negativer Phasenkontrast, Vergr. 1500 : 1

allel zur Probenfläche gekoppelt sind. Wegen des damit verbundenen totalreflektierenden Bereiches wird die Abbildung erschwert. Die Ätzgräben in Zwillingsrichtung, die vorwiegend auf der Polseite liegen, sind sehr lang und setzen sich teilweise auf der Randseite der Spur fort. Bei Belastungen über 0,5 p treten zusätzlich Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung auf, die in größeren Abständen verteilt sind und ein kleineres Flächengebiet einnehmen. Es ist zur Zeit noch

unbekannt, ob die beiden Systeme, die sich überschneiden (Abb. 22 und 23), gleichzeitig oder nacheinander ausgebildet werden. Die Ätz-

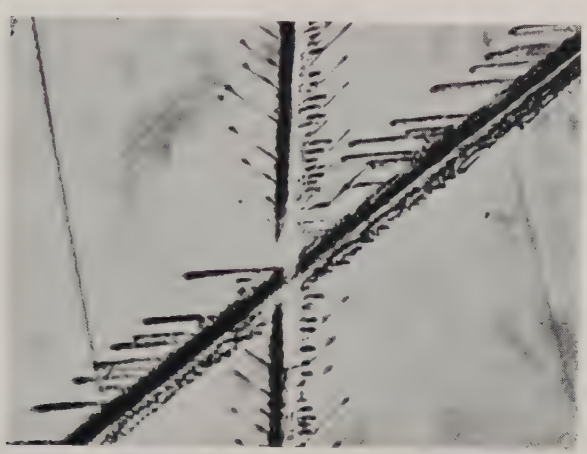

Abb. 20. 1 p-Spuren der Richtung 298° und 355°. Während an der ersteren nur Ätzgräben in Zwillingsrichtung vorhanden sind, beobachtet man an letzterer auch solche in Rhomboederkantenrichtung. Schräglicht, Vergr. 1500 : 1

gräben in Rhomboederkantenrichtung schließen, von der Ritzrichtung aus gesehen, mit der Spur einen stumpfen Winkel ein. Die Ursache dafür kann die Anisotropie des Gitters oder aber ein dynamischer Effekt sein, weil sich die Orientierung der Gräben mit der Ritzrichtung umkehrt.

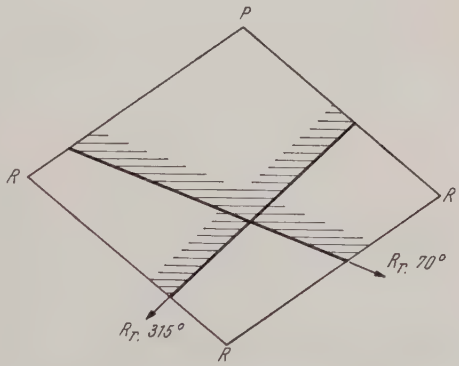

Abb. 21. Schematische Darstellung der Ätzgrabenanordnung an Spuren der Richtung 70° und 315°

Der Abbau an Spuren, die in denselben Winkelbereichen symmetrisch zur 180° Richtung erzeugt werden, erfolgt nach einer ähnlichen Gesetzmäßigkeit. Die Grenzlasten, die zur Bildung der Ätzgrabensysteme führen, liegen nach Maßgabe der Richtungsabhängigkeit tiefer.

In den Bereichen der Spurumgebung, die frei von Ätzgräben sind, sind zahlreiche kleine Ätzgrübchen vorhanden, deren Dichte 10^8 bis $10^9/cm^2$ betragen kann. Da die Dichte geringer Gitterstörungen in unverformten Bereichen nur zirka $10^6/cm^2$ erreicht, muß durch die Verformung eine Fehlstellenvermehrung auf das 100- bis 1000-fache eingetreten sein. Es könnte sich hiebei auch um thermisch induzierte

Fehlstellen handeln [10], weil sie in dem von der Wärmeabgabe durch das erstarrende Material betroffenen Bereich liegen.

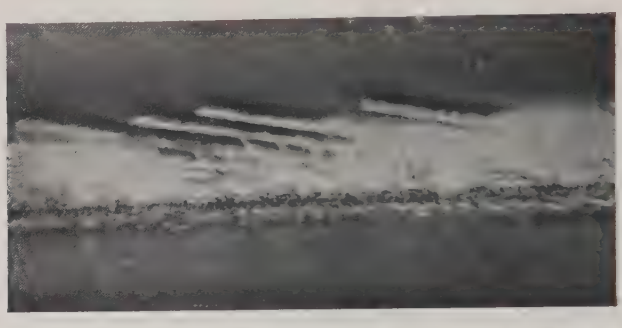

Abb. 22. Ätzgräben an einer 1 p-Spur der Richtung 290°. Starke Aufhellung infolge der Spaltrisse. Ätzdauer: 5 sek. Negativer Phasenkontrast, Vergr. 1500 : 1

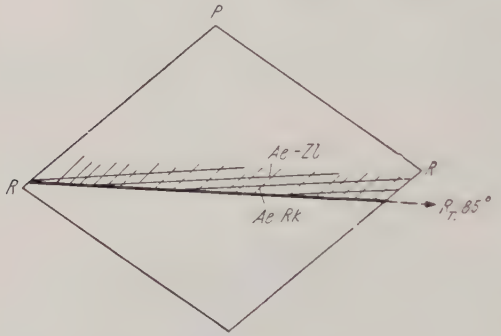

Abb. 23. Schema der Ätzgrabenanordnung an einer 85°-Spur. *Ae.-Zl...* Ätzgruben in Zwillingsrichtung, *Ae.-Rk...* Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung

Zusammenfassend läßt sich bemerken: Die Entstehung von Ätzgrabensystemen ist an die Existenz von Störstellen im Kristallinneren gebunden. Für die Ätzgrabenbildung in Rhomboederkantenrichtung ist die Wirksamkeit von statistisch verteilten Fehlschichten verantwortlich, während für die Entstehung von Ätzgräben in Zwillingsrichtung Störstellen unter der Spaltfläche maßgebend sind, die im Bereich des Spannungshofes liegen und eine lokale Spannungsspitze bewirken müssen, die zur Bildung einer Zwillingslamelle hinreicht. Je nach der Spannungsverteilung um eine Spur beliebiger Orientierung wird die Ausbildung des einen oder anderen Systems begünstigt. Diese Aussagen stützen sich nur auf experimentelle Befunde und sind theoretisch nicht gesichert.

Die Beschaffenheit der Ätzgraben- und Ritzgrabenwände

Ein Vergleich zwischen den Ritzgrabenwänden von Spuren verschiedener Orientierung zeigt, daß sie manchmal sehr rauh und manchmal relativ glatt sein können. Diese Erscheinung läßt sich darauf zurückführen, daß die Ritzgrabenwände von sehr vielen, extrem dicht

gepackten Ätzpyramiden bedeckt sind, das heißt daß auch der Abbau im deformierten Gebiet in Form von kristallographisch orientierten Grübchen erfolgt (Abb. 24).

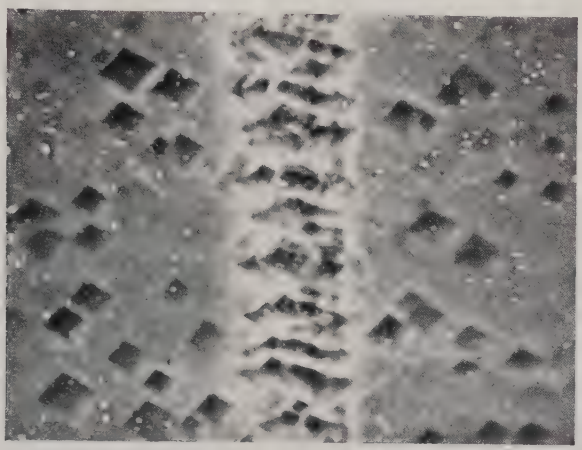

Abb. 24. Es wird eine Ritzspur der Richtung 0° dargestellt, die mit einem Rockwellkegel erzeugt wurde. Der Spurgraben ist dicht mit Ätzrhomben bedeckt. Ätzdauer: 10 sek, 0,1%-ige CH_3COOH, positiver Phasenkontrast, Vergr. 1500 : 1

An Spuren, die parallel zu einer Rhomboederkante erzeugt werden, sind die Ätzgräben Kante an Kante aufgereiht, während sie an Spuren parallel zu den Rhombendiagonalen mit ihren Ecken aneinander grenzen. In beliebigen Ritzrichtungen ist jeder Übergang zwischen diesen beiden Ätzgrubenanordnungen möglich.

Vollkommen analog ist auch die Beschaffenheit der Ätzgrabenwände, wobei allerdings wegen der Ätzgrabenorientierung nur die beiden extremen Möglichkeiten der Ätzgrabenanordnung bestehen. Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung weisen, abgesehen von der Treppenstruktur, relativ glatte Innenwände auf. Sie bestehen aus einer Folge von Pyramidenstümpfen, die mit ihren Kanten aneinander stoßen, wobei die Zwischenwände sehr rasch abgelöst werden dürften, so daß ein Rhomboid als Basis des Ätzgrabens resultiert (Abb. 20, 22 und 25).

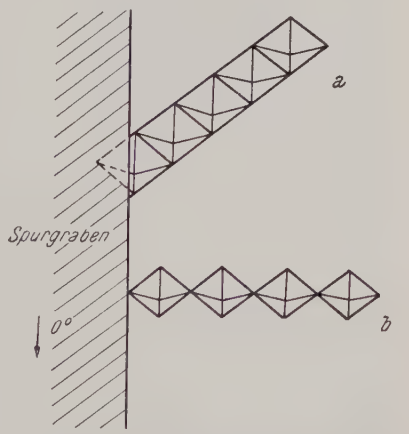

Abb. 25. Schematische Darstellung der Ätzrhomben-Anordnung innerhalb von Ätzgräben. *a*: Ätzgraben in Rhomboederkantenrichtung; *b*: Ätzgraben in Zwillingsrichtung

Die Ätzgräben hingegen, die die Richtung von Zwillingslamellen besitzen, bieten ein rauhes Aussehen (vergl. Abb. 20, 22 und 25 *b*), weil sie sich, wie in Abb. 25 *b* schematisch gezeigt, aus Ätzgrübchen zusammensetzen, die mit ihren Ecken aneinander grenzen. Somit läßt sich auch der Abbau innerhalb von Ritz- und Ätzgräben durch denselben Mechanismus beschreiben, wie er für isolierte Ätzgruben gefunden wurde.

Abbauvorgänge in der Umgebung quasistatischer Eindringfiguren

Wird eine Kalzit-Spaltfläche mit einem Vickersdiamanten quasistatisch beansprucht, so tritt wie beim Ritzen, ein mikroplastischer Fließvorgang auf, wodurch am Ort des Einstichs eine Auskehlung gebildet wird, die bei Verwendung definierter Druckprofile mit diesem übereinstimmt. Bei genügend hoher Beanspruchung kann eine Zwillingslamelle ausgebildet werden, wenn in den Spannungshof eine geeignete Kerbstelle zu liegen kommt [4].

Abb. 26. 0,1p-Einstich, 2 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt, zwei Ätzgrubenketten auf der Polseite. *E* ... Einstich, *Ae* ... Ätzgruben. Negativer Phasenkontrast, Vergr. 1500 : 1

Läßt man auf derartig beanspruchte Spaltflächen Essigsäurelösungen geringer Konzentration einwirken, so entsteht in der Nachbarschaft des Einstichs ein orientierter Abbau, der von der Belastung, der Orientierung des Prüfkörpers relativ zur Spaltfläche und von der Beanspruchungsdauer abhängt, weil letztere die Ausdehnung des Spannungshofes bestimmt. Die Beanspruchungszeiten wurden in der Regel so gewählt, daß mit der Erstarrung des verdrängten Materials zu rechnen war. Bezüglich der Diamantorientierung sind zwei Extremfälle möglich, nämlich der Diamant kann mit einer Kante oder einer Fläche gegen die Polecke gewendet sein. Wegen der Richtungsabhängigkeit der Mikrosprödigkeit ist auch dadurch ein Einfluß auf die Abtragung zu erwarten. Eine wichtige Voraussetzung für das Gelingen der Druckversuche ist, daß die Probe genau senkrecht zur Diamantachse steht, und daß dieser äußerst vorsichtig auf die Probe aufgesetzt wird, weil sonst zusätzlich eine nicht kontrollierbare dynamische Beanspruchung entsteht.

Berücksichtigt man alle diese Faktoren, die am Aussehen der Druckfigur und am chemischen und mechanischen Verhalten in der Nachbarschaft beteiligt sind, so kommt man zu einem einfachen Ergebnis, das man auf Grund der Abtragung an Spuren erwarten konnte.

In der Umgebung von 0,1 p-Eindringfiguren treten nur auf der Polseite des Einstichs Ätzpyramiden in extrem dichter Packung auf. Sie sind im allgemeinen in Form mehrgliedriger Ketten parallel zu kürzeren Rhombendiagonale angeordnet (Abb. 26). Bei Belastungen zwischen

0,1 p und 1 p werden zusätzlich zwei Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung ausgebildet. Diese liegen stets auf der Randseite des Einstichs. Die Grenzlast, die zur Bildung der Ätzgräben erforderlich ist, liegt tiefer als an Spuren der Richtung 0^0. Das läßt sich darauf zurückführen, daß trotz des vorsichtigen Aufsetzens des Druckwerkzeuges eine dynamische Beanspruchung hervorgerufen wird, der wegen der Herabsetzung der Grenzlast um 0,1 p, dieser Betrag zukommen muß. Mit steigender Last nimmt der Oberflächenbedarf der Ätzgrubenketten zu, sie verbreitern und verlängern sich. Sie treten auch auf der Randseite in Erscheinung, be-

Abb. 27. 0,7 p-Einstich. 2 sek geätzt. Auf der Polseite zwei Ätzgrubenketten, auf der Randseite zwei Gräben in Rhomboederkantenrichtung. Negativer Phasenkontrast, Vergr. 1500 : 1

Abb. 28. 1 p-Einstich, 5 sek geätzt. Ätzgrubenketten auf der Polseite, Ätzgräben in Zwillings- und Rhomboederkantenrichtung. Negativer Phasenkontrast, Vergr. 1500 : 1

anspruchen aber dort einen wesentlich kleineren Oberflächenstreifen (Abb. 27). Bei Lasten von 1 p aufwärts können auch Ätzgräben in Zwillingsrichtung auf der Polseite ausgebildet werden. Gleichzeitig kann sich die Zahl der Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung nach Maßgabe der durch die Deformation betroffenen Fehlschichten erhöhen (Abb. 28).

Wird die Ätzzeit erhöht, so läßt sich die Identität der an Druckfiguren auftretenden Ätzmerkmalen mit denen an Spuren bzw. auf unbeanspruchten Spaltflächen beweisen. Die auf der Polseite extrem angehäuften Ätzgruben, die eine Dichte von 10^8 bis $10^9/cm^2$ erreichen können, zeigen die Form von Pyramiden mit einer Treppenstruktur innerhlb der Wände. Die Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung sind Pyramiden mit verlängerter Dachkante (Abb. 29).

Wird der Diamant um 90^0 gedreht, so daß er mit einer Pyramidenfläche gegen die Polecke der Spaltfläche gerichtet ist, dann treten geringfügige quantitative Änderungen in der Materialablösung um den Einstich ein, qualitativ ergibt sich dasselbe Bild. Unterschiede ergeben sich insoferne, als die Längenausdehnung der Ätzgrubenketten auf der Polseite geringer ist als bei der vorhin verwendeten Diamantstellung (Abb. 30).

Wenn man Ritzspuren als kontinuierliche Folge von Mikroeindringfiguren betrachten dürfte, so wie das bisher gemacht wurde [4], dann wäre von vornherein zu erwarten, daß die in der Umgebung von Ritzspuren auftretenden Ätzmerkmale ebenfalls als eine Aneinanderreihung von Ätzfiguren einzelner Diamanteindrücke angesehen werden könnten. Diese Annahme ist — wie das Versuchsergebnis zeigt — nur für Spuren der Richtung Polecke—Randecke erfüllt, weil die Abbauvorgänge ebenso

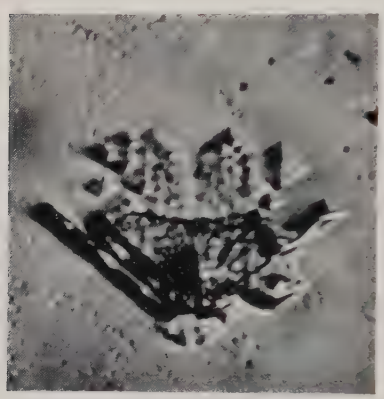

Abb. 29. 1 p-Einstich, 30 sek in 0,02%-iger Essigsäure geätzt. Ätzrhomben auf der Polseite deutlich erkennbar. Schräglicht, Vergr. 1500 : 1

Abb. 30. 0,5 p-Einstich. Verbreiterung und Verkürzung der Ätzgrubenketten. Ätzgräben in Rhomboederkantenrichtung, negativer Phasenkontrast, Vergr. 1500 : 1

wie die Brucherscheinungen durch die Spurorientierung bestimmt werden. An Spuren beliebiger Orientierung treten bei der Ätzeinwirkung Unterschiede in der Verteilung, Häufigkeit und in den Typen der Ätzgräben auf. Diese Abhängigkeit kann an Druckfiguren in der erwähnten Weise nicht eintreten. Die Abbauvorgänge am Eindruck entsprechen denen an Spuren der Richtung 0^0, so daß man diese als kontinuierliche Folge von Eindringfiguren betrachten darf. Die auf der Polseite des Einstichs auftretenden Ätzgrübchenketten können an Spuren der Richtung 0^0 nicht beobachtet werden, weil sie von der Spur und ihrer Erweiterung beim Ätzangriff zugedeckt werden.

Es treten grundsätzlich keine neuen Ätzerscheinungen auf, die nicht schon an Spuren vorhanden sind. Der Abbau erfolgt nach Elementen, die der Kristallsymmetrie gehorchen. Es werden durch die Deformation auch Fehlstellen im Kristallinneren wirksam, die von der Spaltfläche einen Mindestabstand von 500 bis 1000 Å besitzen müssen. Daraus folgt, daß es Kristallgebiete gibt, die vollkommen frei von bruchauslösenden und ätzempfindlichen Fehlstellen sind.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem verstorbenen Lehrer, Herrn Prof. Dr. A. G. SMEKAL für die Anregung zu diesen Untersuchungen und zahlreiche Diskussionen zu danken. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. J. WAGNER, der es mir ermöglichte die Arbeit fertigzustellen.

Literatur

1. Hanke, I., Acta Phys. Austr. im Druck.
2. Gilman, J. J., W. G. Johnston und G. W. Sears, J. Appl. Phys. **29**, 747 (1958).
3. Pfefferkorn, G. und H. Westermann, N. Jb. Mh. **97** (1952); Pfefferkorn, G., Z. f. wiss. Mikros. **60** (1952).
4. Puchegger, F., Naturwiss. **39**, 428 (1952); Diss. Univ. Graz (1954).
5. Klemm, W. und A. Smekal, Naturwiss. **29**, 688, 710, 769 (1941); Smekal, A. und W. Klemm, Mh. Chem. **82**, 411 (1951); Puchegger, F. und A. Smekal, Anz. Österr. Akad. **1951**, 350.
6. Starzacher, A., unveröffentlichte Versuche an Glas; Mittelbach, P., im Druck.
7. Strunz, H., Vortrag auf der Staubtagung des VDI in Duisburg (1950).
8. Schösser, I., Anz. Österr. Akad. **1958**, 114.
9. Patel, A. R. und S. Tolansky, Proc. Roy. Soc., London A **243**, 41 (1957).
10. Hibbard, W. H. und C. G. Dunn, Creep and Recovery; Am. Soc. Met. Cleveland, Ohio, p. 52 (1957); Gilman, J. J., J. Appl. Phys. **30**, 79 (1959); Cumerow, R., J. Appl. Phys. **30**, 946 (1959).
11. Pfefferkorn, G., N. Jb. Min. Abh. **84**, 3, 281 (1952).

Über den Einfluß eines elektrischen Feldes auf die innere Reibung eines Dipolgases

Von

Josef Bauer

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

Mit 2 Abbildungen

(*Eingegangen am 11. Mai 1960*)

Zusammenfassung

Es wird die Abhängigkeit der inneren Reibung eines strömenden Gases bezüglich eines an das Gas angelegten unveränderlichen elektrischen Feldes vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie untersucht. Im Anschluß an eine Arbeit von P. Debye behandelte H. Sirk im Jahre 1923 dieses Problem, allerdings setzte er voraus, daß die Moleküle des betrachteten Gases elektrisch neutrale Aggregate sind, nämlich elektrische Quadrupole, die erst in einem elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ ein Moment $\mathfrak{m} = \alpha \cdot \mathfrak{E}$ erhalten. In der vorliegenden Untersuchung dagegen wird angenommen, daß die Gasmoleküle Dipole tragen, also bereits ein permanentes elektrisches Moment $\mathfrak{m}$ besitzen. Es wird eine Formel für den Koeffizienten der inneren Reibung, der einen von der Feldstärke abhängigen Wert annimmt, angegeben und mit dem entsprechenden Ausdruck für den Reibungskoeffizienten bei Abwesenheit eines äußeren Feldes verglichen. Es zeigt sich, daß durch ein normal auf die Schichten gleicher Strömungsgeschwindigkeit gerichtetes elektrisches Feld der Reibungskoeffizient eines Gases verkleinert wird.

1. Einleitung

Bisher wurde die Abhängigkeit der inneren Reibung eines Gases bezüglich eines an das Gas angelegten elektrischen Feldes unter der Annahme untersucht, daß die Moleküle neutrale Aggregate sind. Im Anschluß an eine Arbeit von P. Debye [1] befaßte sich H. Sirk [2] mit diesem Problem, wobei er insbesondere voraussetzte, daß die Gasmoleküle elektrische Quadrupole sind, die in einem elektrischen Feld $\mathfrak{E}$ ein Moment $\mathfrak{m} = \alpha \mathfrak{E}$ erhalten, wobei unter dem Proportionalitätsfaktor α die Polarisierbarkeit eines Moleküls zu verstehen ist (siehe z. B. [3], S. 8). Es wurden also jene Stoffe, für die man annimmt, daß die Moleküle Dipole tragen, von der Betrachtung ausgeschieden.

Die vorliegende Untersuchung behandelt vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie diese Aufgabe unter der Annahme, daß die

Moleküle des betrachteten Gases Dipole sind, die ein permanentes elektrisches Moment m besitzen.

2. Berechnung der mittleren gegenseitigen potentiellen Energie zweier Dipolmoleküle bei Abwesenheit eines äußeren Feldes

Es soll für das Folgende angenommen werden, daß das Gas durch einen schmalen parallelepipedischen Hohlraum strömt und zwar soll die sichtbare Bewegung des Gases parallel zur x-Achse eines rechtwinkeligen kartesischen Koordinatensystems erfolgen, so daß die Schichten gleicher Strömungsgeschwindigkeit Ebenen sind. In Abb. 1 ist ihr Schnitt mit der auf sie normalen, in der Strömungsrichtung liegenden Zeichenebene dargestellt.

Die Normale z gibt die Richtung des Geschwindigkeitsgefälles an, wobei ϑ der Winkel ist, den die

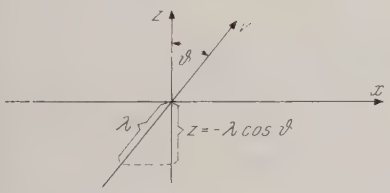

Abb. 1.

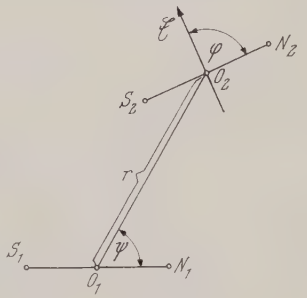

Abb. 2.

Bewegungsrichtung eines Moleküls mit ihr bildet. Der Koeffizient der inneren Reibung berechnet sich dann nach G. Jäger ([4], Seite 37) aus der Formel

$$\eta_0 = \int_0^{\pi} \frac{K\sqrt{T}}{\left(1 + \frac{\Theta}{T}\right)} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \tag{1}$$

Die Größe Θ heißt Sutherlandsche Konstante. Sie ist gegeben durch

$$\Theta = \frac{c \cdot \bar{E}}{k},$$

wobei c einen von D. Enskog ([5], Seite 95) ermittelten, von der Potenz des Kraftgesetzes abhängigen Faktor, k die Boltzmannsche Konstante und $\bar{E}$ die mittlere potentielle Energie zweier Moleküle bei einer Entfernung r bedeutet, in welcher sie sich gegenseitig beeinflussen.

Es handelt sich zunächst darum, die mittlere potentielle Energie zweier Dipole aufeinander zu bestimmen. Wir wollen annehmen, der elektrische Dipol befinde sich im Inneren eines kugelförmigen elastischen Moleküls symmetrisch zum Zentrum, so daß sich nach Abb. 2 folgende Bestimmungsstücke ergeben:

1. Der Abstand $r = O_1 O_2$ der beiden Dipolmittelpunkte O_1, O_2.
2. Der Winkel ψ zwischen der Achse $S_1 O_1 N_1$ des ersten Dipols mit dem Radiusvektor r.
3. Der Winkel φ zwischen der Feldstärke $\mathfrak{E}$, die der erste Dipol auf den zweiten ausübt, mit der Achse des zweiten Dipols. Aus der bekannten Formel für das Potential eines Dipols

$$U = \frac{m}{r^2} \cos \psi$$

erhalten wir sofort

$$K_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2\,m}{r^3} \cos \psi$$

und

$$K_\psi = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{m}{r^3} \sin \psi,$$

so daß schließlich

$$K^2 = K_r^2 + K_\psi^2 = \frac{m^2}{r^6} (1 - 3 \cos^2 \psi),$$

oder

$$|\mathfrak{K}| = \mathfrak{E} = \frac{m}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \psi} \tag{2}$$

folgt. Die potentielle Energie E beider Dipole aufeinander wird, wenn auch der zweite Dipol das Moment m aufweist, gegeben sein durch (3 , Seite 25)

$$E = -m\,\mathfrak{E} \cos \varphi \tag{3}$$

oder

$$E = -\frac{m^2}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \psi} \cdot \cos \varphi \tag{3 a}$$

Die Zahl der Molekülpaare, bei welchen die Entfernung r der Zentren zwischen r und $r + dr$, der Winkel ψ zwischen ψ und $\psi + d\psi$, ferner der Winkel φ zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ fällt, während die kinetischen Energien alle vorkommenden Werte haben, wird daher:

$$dN = A\, e^{-\frac{m^3 \sqrt{1 + 3 \cos^2 \psi \cdot \cos \varphi}}{r^3 T}} \cdot 2\pi r\, dr \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi\, d\varphi \cdot \frac{1}{2} \sin \psi\, d\psi,$$

wo A eine Konstante ist, die aus der Gesamtzahl der Moleküle zu berechnen ist, während T die doppelte kinetische Energie pro Freiheitsgrad bedeutet (vgl. [6], Seite 48).

Suchen wir jetzt die mittlere potentielle Energie $\bar{E}$ eines Molekülpaares vom Abstand r bis $r + dr$, jedoch für beliebige Winkel ψ und φ, so ergibt sich, wenn man durch gleiche Größen im Zähler und Nenner kürzt:

$$\bar{E} = -\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{m^2\sqrt{1+3\cos^2\psi}}{r^3\,T}\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi\cdot e^{\frac{m^2\sqrt{1+3\cos^2\psi}\,.\cos\varphi}{r^3\,T}}\cdot d\psi\,d\varphi}{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} e^{\frac{m^2\sqrt{1+3\cos^2\psi}\,.\cos\varphi}{r^3\,T}}\cdot\sin\varphi\,d\varphi\sin\psi\,d\psi.} \tag{4}$$

Um diesen Ausdruck auszuwerten, kürzen wir im Anschluß an J. D. VAN DER WAALS jr. [7] den Zähler mit Z, den Nenner mit N ab; allerdings fehlt bei VAN DER WAALS der Nenner überhaupt. Setzen wir außerdem noch zur Abkürzung für

$$\frac{m^2}{r^3\,T} = a, \tag{5}$$

so erhalten wir:

$$Z = T\int_0^{\pi}\sin\psi\,d\psi\int_0^{\pi}\cos\varphi\,de^{a\sqrt{1+3\cos^2\psi}\,.\cos\varphi},$$

oder mit

$$x = \sqrt{1+3\cos^2\psi} \tag{6}$$

und partieller Integration

$$Z = T\int_0^{\pi}\sin\psi\,d\psi\left\{e^{ax}+e^{-ax}-\frac{1}{a\,x}\,(e^{ax}-e^{-ax})\right\}.$$

Dieses Integral kann aber als eine Funktion von $\cos\psi$ geschrieben werden, wodurch es gleich dem Doppelten desselben Integrals zwischen den Grenzen 0 und $\pi/2$ ist. Da nun

$$d\cos\psi = \frac{x\,dx}{\sqrt{3}\sqrt{x^2-1}}$$

ist, folgt sofort für den Zähler von (4):

$$Z = -\frac{2\,T}{\sqrt{3}}\int_1^2\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}\left\{e^{ax}+e^{-ax}-\frac{1}{a\,x}\,(e^{ax}-e^{-ax})\right\}. \tag{7}$$

Der Nenner läßt sich mit Benützung derselben Abkürzungen schreiben:

$$N = \int_0^{\pi}\sin\psi\,d\psi\int_{+1}^{-1}e^{a\sqrt{1+3\cos^2\psi}\,.\cos\varphi}\,d\cos\varphi =$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{\pi/2}(e^{ax}-e^{-ax})\,\frac{\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{1+3\cos^2\psi}} = \frac{2}{a\sqrt{3}}\int_1^2\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{\sqrt{x^2-1}}\,dx. \tag{8}$$

Daher ergibt sich für die mittlere potentielle Energie zweier Dipole von der gegenseitigen Entfernung r unter Berücksichtigung von (5):

$$\bar{E} = -\frac{m^2}{r^3} \frac{\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} \left\{ e^{ax} + e^{-ax} - \frac{1}{a\,x}\,(e^{ax} - e^{-ax}) \right\}}{\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \{ e^{ax} - e^{-ax} \}}, \tag{9}$$

oder, nach einer einfachen Umformung

$$\bar{E} = -\frac{m^2}{r^3} \left\{ \frac{\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} (e^{ax} + e^{-ax})}{\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} (e^{ax} - e^{-ax})} - \frac{1}{a} \right\}. \tag{10}$$

Aus der Gleichung (10) lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1. Wenn a sehr groß ist, also r klein, so wird das zweite Glied in der geschweiften Klammer in (10) Null. Da außerdem e^{-ax} neben e^{ax} verschwindet, resultiert aus (10), da zu den Summierungen in den Integralen wesentlich diejenigen Teile beitragen, welche nahe bei $x = 2$ liegen, wenn man im Zähler noch den Wert 2 vor das Integralzeichen setzt, die Formel:

$$\bar{E} = -\frac{2\,m^2}{r^3}. \tag{11}$$

Für genügend kleine Abstände fallen die Achsen der beiden Dipole unter Zudrehung entgegengesetzter Ladungen in eine Linie. Dies zeigt auch der Vergleich mit (3 a), wenn wir dort $\gamma = q = 0$ setzen.

2. Für sehr große Abstände r wählen wir a klein und entwickeln Zähler und Nenner von (10) in Reihen. Daraus ergibt sich unter Beibehaltung der ersten Potenzen von a

$$\bar{E} \equiv 0.$$

Berücksichtigt man noch die zweiten Potenzen von a, so erhalten wir, wenn wir noch $x^2 = y$ setzen:

$$\bar{E} = -T \left\{ \frac{\int_1^4 \frac{dy}{\sqrt{y-1}} + \frac{a^2}{2!} \int_1^4 \frac{y\,dy}{\sqrt{y-1}}}{\int_1^4 \frac{dy}{\sqrt{y-1}} + \frac{a^2}{3!} \int_1^4 \frac{y\,dy}{\sqrt{y-1}}} - 1 \right\},$$

oder, da die Integrale die Werte $2\sqrt{3}$ bzw. $4\sqrt{3}$ liefern, endgültig:

$$\bar{E} = -\frac{2\,m^4}{3\,r^6\,T}. \tag{12}$$

Die mittlere potentielle Energie zweier Dipole nimmt mit der reziproken sechsten Potenz der Entfernung ab und ist umgekehrt proportional der absoluten Temperatur.

3. Berechnung der mittleren gegenseitigen potentiellen Energie zweier Dipolmoleküle in einem äußeren Feld

Da die beiden betrachteten Moleküle das gleiche permanente elektrische Moment m aufweisen sollen, wird sich in einem äußeren elektrischen Feld $\mathfrak{F}$ ein Mittelwert $\bar{m}$ des Momentes in der Feldrichtung einstellen, der sich nach DEBYE aus der Formel (siehe z. B.: [3], Seite 26)

$$\bar{m} = \frac{m^2}{3\,k\,T} F \tag{13}$$

ergibt. Die mittlere gegenseitige potentielle Energie berechnen wir unter Berücksichtigung von (13) analog dem Vorgang im vorigen Abschnitt.

Das Potential eines Dipols wird jetzt

$$U = \frac{1}{3}\frac{m^2}{r^3\,k\,T} F \cos\psi$$

und damit

$$K_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2}{3}\frac{m^2}{r^3\,k\,T} F \cos\psi$$

sowie

$$K_\psi = -\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{1}{3}\frac{m^2}{r^3\,k\,T} F \sin\psi.$$

Daraus folgt sofort

$$K^2 = K_r{}^2 + K_\psi{}^2 = \frac{1}{9}\frac{m^4}{r^6\,k^2\,T^2} F^2\,(4\cos^2\psi + \sin^2\psi)$$

und damit

$$|\mathfrak{K}| = \mathfrak{E} = \frac{1}{3}\frac{m^2}{r^3\,k\,T} F\,(\sqrt{1 + 3\cos^2\psi}). \tag{14}$$

Für das gegenseitige Potential erhalten wir unter den oben gemachten Voraussetzungen somit den Ausdruck

$$E_{\mathfrak{F}} = -\frac{1}{9}\frac{m^4}{r^3\,k^2\,T^2}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}\cdot\cos\varphi\cdot F^2. \tag{14 a}$$

Damit erhalten wir zur Berechnung von $\bar{E}_{\mathfrak{F}}$ die Gleichung

$$\bar{E}_{\mathfrak{F}} = -\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{m^4\sqrt{1+3\cos^2\psi}}{9r^3k^2T^2}\cos\varphi\sin\psi\sin\varphi\,F^2\cdot e^{\frac{m^4\sqrt{1+3\cos^2\psi}}{9r^3k^2T^2}\cos\varphi\cdot F^2}\cdot d\psi\,d\varphi}{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} e^{\frac{m^4\sqrt{1+3\cos^2\psi}}{9r^3k^2T^2}\cos\psi\cdot F^2}\cdot\sin\varphi\,d\varphi\sin\psi\,d\psi}. \tag{15}$$

Diese Gleichung behandeln wir genau so wie Gleichung (4), indem wir zunächst zur Abkürzung

$$\frac{m^4}{9r^3k^2T^2}F^2 = a \tag{16}$$

und

$$\sqrt{1+3\cos^2\psi} = x \tag{17}$$

setzen, womit sich aus (15) der Ausdruck

$$\bar{E}_{\mathfrak{F}} = -\frac{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} a\,x\sin\psi\cos\varphi\sin\varphi\cdot e^{a\,x\cos\varphi}\,d\psi\,d\varphi}{\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} e^{a\,x\cos\varphi}\sin\varphi\,d\varphi\sin\psi\,d\psi} \tag{15 a}$$

ergibt. Die Auswertung der Integrale in Zähler und Nenner liefert, wenn man den Wert für (16) wieder einsetzt, für die mittlere potentielle Energie die von der Feldstärke abhängige Größe

$$\bar{E}_{\mathfrak{F}} = -\frac{2\,m^8F^4}{729\,r^6k^4T^5}. \tag{18}$$

Die mittlere gegenseitige potentielle Energie zweier Dipole in einem elektrischen Feld nimmt mit der sechsten Potenz der Entfernung ab und ist umgekehrt proportional der fünften Potenz der absoluten Temperatur und direkt proportional der vierten Potenz der Feldstärke.

4. Berechnung der Reibungskoeffizienten η_0 und $\eta_{\mathfrak{F}}$

Es handelt sich jetzt darum, den Nenner in Gleichung (1) mit Rücksicht auf die gewonnenen Ergebnisse umzuformen und die geforderte Integration auszuführen. Wir erhalten wegen (12) bei Abwesenheit eines äußeren Feldes

$$1+\frac{c\bar{E}}{kT} = 1-\frac{2\,c\,m^4}{3\,r^6\,k\,T^2}.$$

Daher wird der Koeffizient der inneren Reibung ohne Feld:

$$\eta_0 = K\sqrt{T}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{\left(1-\frac{2\,c\,m^4}{3\,r^6\,k\,T^2}\right)} = \frac{2\,K\sqrt{T}}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2\,c\,m^4}{3\,r^6\,k\,T^2}\right)} \tag{19}$$

Für den Reibungskoeffizienten im Feld $\mathfrak{F}$ ergibt sich, da

$$1+\frac{c\,\bar{E}_{\mathfrak{F}}}{k\,T} = 1-\frac{2\,c\,m^8\,F^4}{729\,r^6\,k^5\,T^6}$$

ist, der Wert

$$\eta_{\mathfrak{F}} = K\sqrt{T}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{\left(1-\frac{2\,c\,m^8\,F^4}{729\,r^6\,k^5\,T^6}\right)} = \frac{2\,K\sqrt{T}}{3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2\,c\,m^8\,F^4}{729\,r^6\,k^5\,T^6}\right)}. \tag{20}$$

Aus Gleichung (19) und (20) folgt für das Verhältnis des Reibungskoeffizienten $\eta_{\mathfrak{F}}$ im Feld $\mathfrak{F}$ zum Reibungskoeffizienten η_0 ohne Feld bei derselben Temperatur:

$$\frac{\eta_{\mathfrak{F}}}{\eta_0} = \frac{1-\frac{2\,c\,m^4}{3\,r^6\,k\,T^2}}{1-\frac{2\,c\,m^8}{729\,r^6\,k^5\,T^6}F^4} = 1-\frac{\frac{2\,c\,m^4}{3\,r^6\,k\,T^2}-\frac{2\,c\,m^8\,F^4}{729\,r^6\,k^5\,T^6}}{1-\frac{2\,c\,m^8\,F^4}{729\,r^6\,k^5\,T^6}}, \tag{21}$$

mit

$$A = \frac{2\,c\,m^4}{3\,r^6\,k\,T^2}, \qquad B = \frac{m^4}{243\,k^4\,T^4}$$

lautet Gleichung (21):

$$\frac{\eta_{\mathfrak{F}}}{\eta_0} = 1-\frac{A(1-BF^4)}{(1-A\,BF^4)}. \tag{22}$$

Da die Brüche in Gleichung (22), wie die numerische Auswertung ergibt, klein gegen 1 und außerdem alle Glieder wesentlich positiv sind, folgt für das berechnete Verhältnis $\eta_{\mathfrak{F}}/\eta_0 < 1$ oder

$$\eta_{\mathfrak{F}} < \eta_0. \tag{23}$$

Wir gelangen daher zu folgendem Ergebnis: Der Koeffizient der inneren Reibung eines strömenden Dipolgases wird durch ein normal auf die Schichten gleicher Strömungsgeschwindigkeit gerichtetes zeitlich konstantes elektrisches Feld verkleinert. Wirkt kein elektrisches Feld ($\mathfrak{F} = 0$), so erhalten wir nach leichter Rechnung die durch Gleichung (1) ausgedrückte SUTHERLANDsche Temperaturabhängigkeit des Reibungskoeffizienten:

$$\frac{\eta_{\mathfrak{F}}}{\eta_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{\Theta}{T}\right)},$$

oder

$$\eta_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Theta}{T}\right)} \cdot \text{konst.},$$

was gleichbedeutend mit Gleichung (1) ist.

5. Numerische Auswertung

Der Wert des Enskogschen Faktors c in Gleichung (21) beträgt entsprechend der r^{-7} proportionalen Kraft, mit der sich zwei Dipolmoleküle anziehen, ([5], Seite 96)

$$c = 0{,}1822.$$

Damit ergibt sich für NH_3, wobei alle Größen im CGS-System gemessen sind, mit

$$k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}, \qquad m = 1{,}44 \cdot 10^{-18}, \qquad r = 3{,}13 \cdot 10^{-8},$$
$$T = 300, \qquad F = 50 \text{ e.s.E}$$

$$\frac{\eta_{\mathfrak{F}}}{\eta_0} = 1 - 4{,}5 \cdot 10^{-7}.$$

Dieselbe Rechnung liefert für SO_2 mit $m = 2{,}11 \cdot 10^{-18}$ und $r = 2{,}72 \cdot 10^{-8}$ das Ergebnis

$$\frac{\eta_{\mathfrak{F}}}{\eta_0} = 1 - 6{,}6 \cdot 10^{-8}.$$

Literatur

1. P. Debye, Die van der Waalsschen Kohäsionskräfte. Phys. ZS. 21, 178 ff (1920).
2. H. Sirk, Der Einfluß eines elektrischen Feldes auf die innere Reibung eines Gases, Z. f. Physik 13, 35–47 (1923).
3. P. Debye, Polare Molekeln, Leipzig: S. Hirzel, 1929.
4. G. Jäger, Die Fortschritte der kinetischen Gastheorie. 2. Auflage. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1919.
5. D. Enskog, Kinetische Theorie der Vorgänge in mäßig verdunnten Gasen, Uppsala: 1917.
6. J. W. Gibbs, Elementare Grundlagen der statistischen Mechanik, Leipzig: J. A. Barth, 1905.
7. J. D. van der Waals jr., On the law of molecular attraction for electrica. double points, Proc. Roy. Acad. Amsterdam, XI, p. 132 and p. 315 (1908)1

Eichtransformation und Quantelung des freien elektromagnetischen Feldes

Von

Wolfgang Kummer

Institut für theoretische und allgemeine Physik der Technischen Hochschule in Wien

(*Eingegangen am 17. Oktober 1960*)

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß die Schwierigkeiten der verschwindenden Photonmasse bei der Quantisierung des MAXWELLschen Feldes auch ohne die üblichen künstlichen Zusatzannahmen vermieden werden können. Man erhält für die in der Störungstheorie der Wechselwirkung nötigen Verjüngungen der elektromagnetischen Feldoperatoren lorentzkovariante Ausdrücke, die einerseits der Freiheit der Eichtransformation Rechnung tragen, andererseits aber in den beobachtbaren eichinvarianten Aggregaten der Quantenelektrodynamik zu den bekannten Resultaten führen.

Das heute im Hinblick auf die quantenhafte Beschreibung der Wechselwirkung von Photonen mit geladenen Elementarteilchen, insbesondere Leptonen, so geschlossen wirkende Gebäude der Quantenelektrodynamik weist in formaler Hinsicht einen kleinen Schönheitsfehler auf, der die jeder invarianten Störungsrechnung zugrundeliegende Quantelung des isolierten MAXWELLschen Feldes betrifft.

Bei der Anwendung des HEISENBERG-PAULIschen Feldquantisierungsschemas [1] auf die MAXWELLsche Theorie tritt durch das identische Verschwinden einer der zu den Potentialen kanonisch konjugierten Variablen eine Komplikation auf. Diese hat ihre Wurzel in der Gültigkeit der LORENTZ-Konvention und wurde bekanntlich zunächst von FERMI [2] behoben. Er betrachtete eine allgemeinere Theorie, bei der keine solche Verknüpfung der Feldvariablen vorzuschreiben ist, und beschränkte sich nach der Quantisierung auf solche Systemzustände $|\psi\rangle$, für die die LORENTZ-Konvention nicht als Operatorgleichung gültig ist, sondern in Form der schwächeren Bedingung

$$\partial_j \phi_j |\psi\rangle = 0$$

BELINFANTE [3] und andere bemerkten, daß sich derartige Zustände nicht mit Systemvektoren $|\psi\rangle$ mit endlicher Norm darstellen ließen.

Ein anderer Ausweg, durch Wahl einer speziellen Eichung (verschwindendes skalares Potential) nur die dann allein auftretenden trans-

versalen Variablen zu quantisieren, läßt sich zwar auch formal relativistisch kovariant durchführen (SCHWINGER [4]), doch begibt man sich damit der Möglichkeit, etwas der Freiheit einer Eichtransformation Entsprechendes (wie im ersten Fall das Auftreten unphysikalischer longitudinaler Photonen) in die quantisierte Theorie hinübernehmen zu können. Dort benötigt man aber gerade diesen Freiheitsgrad, um das für die Formulierung der Renormalisationstheorie so wichtige Prinzip der Eichinvarianz auch im Rahmen der Quantentheorie sinnvoll machen zu können. Das nach mehreren ähnlichen Versuchen derzeit allseits akzeptierte Verfahren von GUPTA und BLEULER [5], eine indefinite Metrik im HILBERT-Raum der Systemzustände einzuführen, macht damit jedoch ad hoc ziemlich schwerwiegende Eingriffe in das System der Quantenmechanik, ohne ebenso die Annahme einer „schwachen" Bedingung umgehen zu können.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß man auch ohne derartige Modifizierungen auskommen kann. In der üblichen Schreibweise mit dem Viererpotential

$$\phi_i = L^{-3/2} \sum_{k_\alpha} (2\,k_0)^{-1/2} \left(a_i\, e^{j k_s\, x_s} + a_i^+\, e^{-j k_s\, x_s}\right) \text{*)}$$

lautet die HAMILTON-Funktion des MAXWELLschen Feldes in der Impulsdarstellung (Periodizitätsvolumen L^3, $c = \hbar = 1$)

$$H = \frac{1}{2} \sum k_0 \{a_j^+\, a_j\} \tag{1}$$

Drückt man darin a_0 durch $a_\varkappa$ mit der LORENTZ-Konvention

$$k_j\, a_j = 0 \tag{2}$$

aus, was dadurch nahegelegt wird, daß es gerade dieser Summand ist, der die Indefinität von (1) verursacht, und sucht die Eigenwerte der quadratischen Form unter der Summe

$$H = \sum k_0 \left(\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha\, k_\beta / k_0^2\right) a_\alpha^+\, a_\beta, \tag{3}$$

so kommt man in den neuen a_α' auf

$$H = \sum k_0\, a_A^{+\prime}\, a_A' \tag{4}$$

Dieser Ausdruck ist eichinvariant, weil das longitudinale $a_1' = a_0$, das allein durch eine Eichtransformation (2. Art)

$$\bar{\phi}_i = \phi_i + \partial_i W \tag{5}$$

mit

$$\Box\, W = 0$$

* Kleingeschriebene lateinische Indizes laufen von 1 bis 4, griechische von 1 bis 3, großgeschriebene lateinische von 2 bis 3.

bzw. im Impulsraum

$$\tilde{a}_i = a_i + j\, k_i\, b(k_\alpha)$$

geändert wird, nicht explizit auftritt.

Zunächst folgen aus den Bewegungsgleichungen im Impulsraum

$$-j\, k_0\, a_A' = j\, [H, a_A']$$

die Vertauschungsrelationen (im folgenden abgekürzt V.R.) für die Feldvariablen

$$[a_A', a_B'^{+}] = \delta_{A\,B} \tag{6}$$

Die longitudinale Variable $a_0 = a_1'$ kann nun keine der unabhängigen Systemvariablen sein, da sie im HAMILTON-Operator nicht auftritt. Wenn man sie trotzdem im kanonischen Formalismus mitquantelt, scheinen Schwierigkeiten von vornherein naheliegend.

Wenn a_1' nicht verschwindet, also die Eichung frei bleibt, kann es nur ein Funktional der transversalen Operatoren sein

$$a_1' = a_0 = f(a_A') \tag{7}$$

Mit

$$\tau_A'^{+} = -\frac{\partial f}{\partial a_A'} \tag{8}$$

erhält man wieder aus der Bewegungsgleichung

$$-j\, k_0\, a_1' = j\, [H, a_1'] = -\tau_A'^{+}\, j\, [H, a_A'] = j\, k_0\, \tau_A'^{+}\, a_A' \tag{9}$$

Nach (7), (8), (9) muß f eine homogene Funktion ersten Grades in den a_A' sein. Alles Wesentliche wird durch einen linearen Zusammenhang erfaßt. Mit $\tau_1' = \tau_1'^{+} = 1$ kann man (7) schreiben

$$\tau_\alpha'^{+}\, a_\alpha' = 0 \tag{10}$$

oder auch

$$\tau_i^{+}\, a_i = 0 \tag{11}$$

mit

$$\tau_i^{+}\, k_i/k_0 = 1$$

wenn man wieder zum ungestrichenen System zurückkehrt.

Anschaulich ist nun klar, daß jeder bestimmten Eichung eine lineare Mannigfaltigkeit τ_i' eindeutig entspricht. Bei festem a_A' gehört zu jedem $\tilde{a}_1'$ eine Mannigfaltigkeit von Vektoren τ_i', deren Endpunkte sowohl auf der Ebene $\tau_1' = 1$ als auch auf derjenigen liegen, die durch den Ursprung geht und deren Normalenvektor a_i' ist. Jeder Eichung ist ein Schnittgerade der genannten Ebenen zugeordnet.

Da die unitäre Transformation $\beta_{\alpha\beta}$ die (3) auf Normalform bringt, die Bedingungen erfüllen muß

$$\beta_{\alpha 1} = k_\alpha/k_0 \tag{12}$$
$$k_\alpha\, \beta_{\alpha\beta} = 0$$

folgt für die V.R.

$$[a_\alpha, a_\beta^{+}] = \delta_{\alpha\beta} + \tau_\mu^{+}\, \tau_\mu\, k_\alpha\, k_\beta/k_0^{2} - \tau_\beta^{+}\, k_\alpha/k_0 - \tau_\alpha\, k_\beta/k_0 \tag{13}$$

Die a_0 enthaltenden V.R.

$$[a_\alpha, a_0^+] = \tau_\mu^+ \tau_\mu k_\alpha/k_0 - \tau_\alpha \tag{14}$$

$$[a_0, a_0^+] = \tau_\mu^+ \tau_\mu - 1 \tag{15}$$

sind mit (2) verträglich, wenn

$$k_\beta \tau_\beta^+/k_0 = 1, \tag{16}$$

was mit der obigen Bedingung $\tau_1' = 1$ identisch ist. (13), (14) und (15) kann man kovariant zusammenschreiben

$$[a_i, a_j^+] = \delta_{ij} + \tau_\kappa^+ \tau_\kappa k_i k_j/k_0^2 - \tau_i k_j/k_0 - \tau_j^+ k_i/k_0 \tag{17}$$

mit der Bedingung

$$\tau_i k_i/k_0 = 1. \tag{18}$$

(17) gilt auch, wenn die zeitliche Komponente von τ_i nicht verschwindet und ist verträglich mit LORENTZ-Konvention (2) und der „Eichbeziehung"

$$\tau_i^+ a_i = 0. \tag{19}$$

Man sieht, daß $T_i = \tau_i/k_0$ sich wie ein Vierervektor transformieren muß; dann ist die Kovarianz von (17) und (18) evident.

Die Aussagen der die Wechselwirkung mit anderen Feldern berücksichtigenden Theorie der S-Matrix sind bei Kenntnis des Kommutators und des Vakuumerwartungswertes des Antikommutators im Ortsraum zu gewinnen. Man erhält durch Transformieren von (17)

$$[\phi_i(x), \phi_j(\bar{x})] = j\,(\delta_{ij} D(x - \bar{x}) - \partial_i \partial_j G(x - \bar{x}) + \partial_j H_i(x - \bar{x}) + \partial_i \bar{H}_j(x - \bar{x})) \tag{20}$$

mit

$$D(x) = -j(2\pi)^{-3} \int d^4k\, e^{jkx}\, \delta(k^2)\, \varepsilon(k)$$

$$G(x) = 2\,(2\pi)^{-3} \int d^4k\, T_s^+(k_x)\, T_s(k_x) \sin k\,x\, \delta(k^2)\, \theta(k) \tag{21}$$ *

$$H_i(x) = (2\pi)^{-3} \int d^4k\, (T_i\, e^{jkx} + T_i^+\, e^{-jkx})\, \delta(k^2)\, \theta(k)$$

und genau so

$$\langle\{\phi_i(x), \phi_j(\bar{x})\}\rangle_0 = \delta_{ij} D^1(x - \bar{x}) - \partial_i \partial_j G^1(x - \bar{x}) + \partial_j H_i^1(x - \bar{x}) + \partial_i \bar{H}_j^1(x - \bar{x}) \tag{22}$$

mit

$$D^1(x) = (2\pi)^{-3} \int d^4k\, e^{jkx}\, \delta(k^2)$$

$$G^1(x) = 2\,(2\pi)^{-3} \int d^4k\, T_s^+\, T_s \cos k\,x\, \delta(k^2)\, \theta(k) \tag{23}$$

$$H_i^1(x) = j\,(2\pi)^{-3} \int d^4k\, (T_i\, e^{jkx} - T_i^+\, e^{-jkx})\, \delta(k^2)\, \theta(k)$$

* Hierin ist jeweils zur Abkürzung $k_s x_s = k\,x$ gesetzt und weiters die Vorzeichenfunktion $\varepsilon(k) = \begin{cases} +1 & k_0 > 0 \\ -1 & k_0 < 0 \end{cases}$ und die Stufenfunktion $\theta(k) = \begin{cases} +1 & k_0 > 0 \\ 0 & k_0 < 0 \end{cases}$ verwendet worden.

Dabei wurde der Übergang $L \to \infty$ durchgeführt; $\tilde{H}_i$ und $\tilde{H}_i^1$ ergeben sich aus H_i bzw. H_i^1, wenn dort die Anteile positiver und negativer Frequenz untereinander ausgetauscht werden.

Bei Verwendung obiger Ausdrücke in eichinvarianten Operatorkombinationen kommt es nicht auf die „longitudinale Beimischung" an, das heißt, es bleiben die einer „transversalen" Quantelung entsprechenden Teile wesentlich. Da man für die beobachtbaren Größen sogar eine Eichinvarianz 1. Art (gegen Transformationen (5) ohne die Bedingungen $\Box W = 0$ bzw. $k^2 = 0$) voraussetzen kann, ist es durch eine solche Eichung ohne weiteres möglich, die kombinierten Ausdrücke (20) und (22) für derartige Rechnungen auf den ersten Summanden zu reduzieren. Da ebenso zur Berechnung der Kommutatoren für die Feldgrößen Rotorbildungen in (20) und (22) nötig sind, fallen die von der Eichung abhängigen Gradiententerme weg und es bleibt auch hier nur der erste Summand auf der rechten Seite wesentlich.

Zum Abschluß sei noch auf die Rolle der obigen Betrachtungsweise bei der Behandlung des Photonenspins hingewiesen. Es wird dabei in den üblichen Darstellungen nur gezeigt, daß in einer „erweiterten" MAXWELLschen Theorie ohne LORENTZ-Konvention der Spin in der Fortbewegungsrichtung die Werte ± 1 annehmen kann, ohne auf die longitudinalen Variablen einzugehen. Hier sieht man, daß der Spin in jeder anderen Richtung vom „Eichvektor" T_i abhängen und daher das Prinzip der Eichinvarianz verletzen würde.

Literatur

1. W. HEISENBERG-W. PAULI, Z. Physik **56**, 1 (1929); **59**, 168 (1930).
2. E. FERMI, Rend. Acc. Lincei **9**, 881 (1929); **12**, 431 (1930); Revs. Mod. Phys. **4**, 87 (1932), Teil III.
3. J. BELINFANTE, Phys. Rev. **76**, 226 (1949). — F. COESTER und J. M. JAUCH, Phys. Rev. **78**, 149 (1950). — S. T. MA, Phys. Rev. **80**, 729 (1950).
4. J. SCHWINGER, Phys. Rev. **74**, 1938 (1948).
5. S. GUPTA, Proc. Roy. Soc. **63**, 681 (1950); **64**, 850 (1951). — K. BLEULER, Helv. Phys. Acta **23**, 567 (1950).

Untersuchungen zur Streamtheorie des Tagesganges

Von

Gerd Otter

Physikalisches Institut der Universität Innsbruck

Mit 6 Abbildungen

(*Eingegangen am 19. Oktober 1960*)

Die Theorie, daß der Tagesgang (Tg.) der sekundären kosmischen Strahlung (k.S.) durch Beschleunigung der primären kosmischen Strahlungsteilchen in den elektrischen Feldern der Streams entsteht [1, 6, 7], wird in dieser Arbeit genau untersucht. Die bisherigen Berechnungen beziehen sich auf Mittelwerte der Tg. über längere Zeiträume und auf mehrere gleichzeitig ausgesandte Streams [1]. Weil jedoch Phasenlage und Amplitude des Tg. der sekundären k.S. sich innerhalb von wenigen Tagen stark ändern können, ist es schwer verständlich, daß der Tg. durch viele Streams entstehen soll. In dieser Arbeit wird der Einfluß eines einzigen Streams genauer untersucht. Für alle möglichen Lagen relativ zur Erde und verschiedene Konstante des Streams (z. B. Partikelgeschwindigkeit, Öffnungswinkel, Feldabnahme im Stream) wurden Phase und Amplitude des Tg. berechnet, die nun nicht mehr einen Mittelwert darstellen, sondern Einzelfälle beschreiben. Grundsätzlich erhielte man alle möglichen Fälle durch Überlagerung der Effekte von zwei oder mehreren Streams, jedoch kann gezeigt werden, daß keine andersartigen Formen des Tg. auftreten. Aus dem Vergleich der berechneten und beobachteten Tg. folgt, daß es unwahrscheinlich ist, daß der Tg. nach dieser Theorie in der bestehenden Form erklärt werden kann.

Es ist eine sinnvolle Annahme, daß die aus der Sonne emittierten Gasmassen (Stream) sich kegelförmig in den Raum ausbreiten. Für Streamgeschwindigkeiten $u \geqslant 10^8$ cm/sec ist dieser Kegel praktisch linear. Im Stream werden Magnetfelder so eingefroren (das heißt mit der Materie fest verankert in den Raum hinaustransportiert), daß der Fluß durch die Oberfläche konstant bleibt. Das longitudinale Magnetfeld (parallel zur Streamgeschwindigkeit u) nimmt mit der Entfernung

von der Sonne wie R^{-2} und das transversale Feld (senkrecht auf u) wie R^{-k} mit $1 \leqslant k \leqslant 2$ ab [1]. Ein Beobachter auf der Erde konstatiert im Stream ein Magnetfeld $\mathfrak{h}$ und ein elektrisches Feld

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}[u\,\mathfrak{h}] \tag{1}$$

[2]. In diesen Feldern wird das differentielle Energiespektrum $D(E)$ der primären k.S. auf

$$\bar{D}(E) = D(E)\left(1 + (2+\gamma)\frac{dE}{E}\right) \tag{2}$$

geändert. Da diese Formel von der in der Literatur verwendeten abweicht, wird im Anhang eine Ableitung davon gebracht.

Diese Energiespektrumsänderung gilt nur für Partikel, die das elektrische und magnetische Feld durchqueren können und nicht infolge des Magnetfeldes zurückreflektiert werden.

Der Bereich eines Streams mit dem Öffnungswinkel δ, dessen Achse mit der Verbindung Erde-Sonne einen Winkel α einschließt, wird durch den Winkel β festgelegt, der folgend definiert ist: β ist der Winkel zwischen der Senkrechten von der Erde auf die Streamachse und der Geraden von der Erde zum betreffenden Streambereich. β wird positiv oder negativ gerechnet, wenn diese Gerade im oder außerhalb des Dreiecks liegt, das aus der Senkrechten, der Verbindung Erde-Sonne und dem Stream gebildet wird.

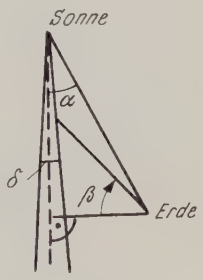

Abb. 1

Es wird die Energieänderung ΔE eines k.S.-Teilchens, das den Stream durchquert, bei Berücksichtigung von (1) berechnet:

$$\Delta E = e\int(\mathfrak{E}\,d\sigma) = \frac{u}{c}\cdot e\cdot R\cdot\delta\cdot|\mathfrak{h}| \tag{3}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{u}{c}\cdot 300\cdot|\mathfrak{h}|_{\odot}^{\pm}\cdot R_{\odot}^{\pm}\cdot\delta & \text{bei Abnahme von } \mathfrak{h} \text{ mit } R^{-1} \\ \dfrac{u}{c}\cdot 300\cdot|\mathfrak{h}|_{\odot}^{\pm}\cdot R_{\odot}^{\pm}\cdot\delta\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha\,(1-\tan\alpha\tan\beta)} & \\ & \text{bei Abnahme von } \mathfrak{h} \text{ mit } R^{-2} \end{cases}$$

R ist der Abstand Sonne-Streambereich, $\mathfrak{h}$ das Magnetfeld im Abstand R von der Sonne, $R_{\odot}^{\pm}$, $\mathfrak{h}_{\odot}^{\pm}$ die entsprechenden Werte in der Sonne-Erde-Entfernung.

Die transversale Komponente des Magnetfeldes erzeugt kein elektrisches Feld und daher ist $\Delta E = 0$.

Die Amplitude des Tg. durch die longitudinale Komponente des Magnetfeldes und das dazugehörige elektrische Feld ist bei einem bestimmten konstanten Betrag des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ dann am größten, wenn die Richtung von $\mathfrak{E}$ in der Ebene Stream-Sonne-Erde liegt, denn in diesem Falle werden alle k.S.-Teilchen, die die Erde erreichen, im Stream beschleunigt bzw. verzögert. Auf diesen Fall beziehen sich die weiteren Rechnungen.

Die Bewegungsgleichung der k.S.-Partikel mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ im Stream ist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,\mathfrak{w}}{\left(1-\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}\right)^{1/2}}\right) = e\,\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{h}] = \frac{e}{c}\,[\mathfrak{w}-\mathfrak{u},\mathfrak{h}] \tag{4}$$

Die Bahn der Teilchen, deren Einfallsrichtung in der Normalebene auf $\mathfrak{h}$ liegt, ist in erster Näherung ein Kreisbogen, da $u \ll w$ und die Driftgeschwindigkeiten infolge des elektrischen Feldes und infolge der Inhomogenität von $\mathfrak{h}$ vernachlässigbar sind.

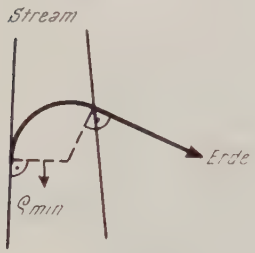

Abb. 2

Nur die Teilchen können den Stream durchqueren, deren Energie $E \geqslant E_{\min} = 300 \cdot |\mathfrak{h}| \cdot \varrho_{\min}$ ist. Denn wenn ein Teilchen, das aus einem Streambereich kommt, aus einer bestimmten Richtung auf die Erde auffällt, so muß diese Richtung die Tangente an den Kreisbogen sein, den es im Stream beschreibt. Der kleinste Kreisbogen hat den Radius $\varrho_{\min}$ (die Richtung zur Erde und der linke Rand des Streams sind Tangenten an diesen Kreisbogen). Je nach Richtung von

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\odot}^{\pm}\left(\frac{R_{\odot}^{\pm}}{R}\right)^{k} \qquad 1 \leqslant k \leqslant 2 \tag{5}$$

(aus der Zeichenebene heraus oder hinein) sind die Kreisbogen konvex oder konkav zur Sonne gerichtet und dem entsprechend ergeben sich zwei verschiedene $\varrho_{\min}$. Die Folge davon ist, daß je nach Richtung von $\mathfrak{h}$ vor oder nach einem magnetischen Sturm größere Amplituden des Tg. auftreten müssen.

Es wird die Anzahl der k.S.-Teilchen berechnet, die (ohne Berücksichtigung der Ablenkung im Erdmagnetfeld) aus dem Streambereich β_1 bis β_2 in ein Registriergerät an der Grenze der Atmosphäre in 1 sec auf 1 cm^2 auffallen:

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2}\int_{\vec{E}(\beta)}^{\infty} A \cdot E^{\gamma}\left(1 \pm \frac{\Delta E}{E}\cdot g\cdot(\gamma+2)\right)\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\cdot\delta\cdot dE\cdot d\beta \tag{6}$$

wenn $A \cdot E^{-\gamma} = D(E)$, $\bar{E}(\beta)$ die Abschneideenergie, die für Innsbruck zwischen 1,7 und 2,4 Gev liegt, bedeuten. g [1] berücksichtigt die Geometrie des Streams und nimmt die Werte zwischen $\frac{1}{2}$ (bei unendlicher Entfernung des Streams von der Erde) und $\pi/4$ (bei Beginn eines magnetischen Sturmes) an. $(\cos(\alpha + \beta) \cdot \delta \cdot d\beta)/\sin\alpha$ ist der Raumwinkel $d\Omega$ von der Erde zum Streambereich $d\beta$. ΔE ist nach (3) einzusetzen.

Die Umrechnung von der primären auf die sekundäre k.S. geschieht mit Hilfe der Kopplungskonstanten [1].

Primäre Teilchen der Energie $E < 7$ Gev tragen in Innsbruck nicht zur harten Komponente der sekundären Strahlung bei. Die Amplitude des Tg. der primären k.S. ist für Teilchen, die den Stream gerade noch durchqueren kön-

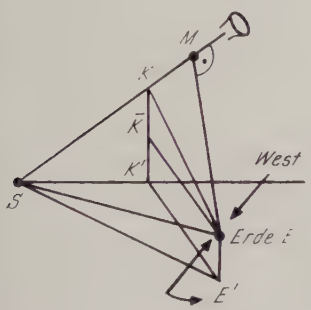

Abb. 3

$\varphi = \sphericalangle MSK'$ $\psi = \sphericalangle K'SE'$

$\alpha = \sphericalangle MSE$ $\beta = \sphericalangle MEK$

$\varepsilon = \sphericalangle ESE'$ (zur Zeit der Äquinoktien ist $\varepsilon = 0°$, da die Sonne in der Äquatorebene liegt. Im Sommer ist $\varepsilon = -23{,}5°$, im Winter $\varepsilon = +23{,}5°$)

$s = \sphericalangle KE\bar{K}$ $r(t = 12^h) = \sphericalangle SE'K'$

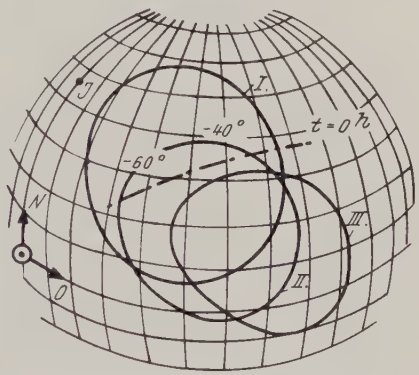

Abb. 4

I. für 22 bis 30 Gev

II. für 15 bis 22 Gev

III. für 7 bis 15 Gev

⊙ ... Ursprung

J ... Innsbruck

nen (Energie $E_{\min}$), am größten. Damit diese Partikel aber zum Tg. der sekundären harten Komponente beitragen, müssen sie Energien größer als 7 Gev besitzen.

Es wird die Deklination und der Stundenwinkel eines Streambereichs zur Zeit t eines von der Sonne in einer beliebigen Richtung ausgesandten Streams berechnet. Die Richtung des Streams wird durch zwei Winkel bestimmt, und zwar durch φ und ψ. Wird durch die Sonne eine Ebene gelegt, die parallel zur Erdäquatorebene liegt, so ist φ der Winkel zwischen der Streamachse und der Projektion des Streams auf diese Ebene und ψ der Winkel zwischen der Projektion des Streams und der Projektion der Verbindung Erde-Sonne auf diese Ebene. Im äquatorialen System wird von einem Beobachter auf der Erde ein Punkt des Streams durch Angabe der Deklination s und des Stundenwinkels r beschrieben.

Es gilt:

$$\left.\begin{aligned} s &= \left\{ \arcsin \left[\sin\varphi \,(\operatorname{ctg}\alpha \cos\beta - \sin\beta) - \frac{\sin\varepsilon \cdot \cos\beta}{\sin\alpha} \right] \right\} {}^{0}N \\ r &= \left\{ \operatorname{arc\,ctg} \left[\frac{\cos\varepsilon}{\sin\psi \cdot \cos\varphi \,(\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \tan\beta)} - \operatorname{ctg}\psi \right] + \right. \\ &\qquad \left. + 15 \cdot t^{h} - 180^{0} \right\} {}^{0}W \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

wobei:

$$\alpha = \arccos \left[\cos \left(\varphi - \arctan \frac{\tan\varepsilon}{\cos\psi} \right) (1 - \cos^2\varepsilon \cdot \sin^2\psi)^{1/2} \right]$$

Bei der Berechnung der Phasenlage des Tg. der sekundären k.S. muß vor allem auch der Einfluß des Erdmagnetfeldes berücksichtigt werden. Die Ablenkung der Teilchen mit verschiedenen Energien im Erddipolfeld wurde von Brunberg [3] mit Hilfe einer Terrella experimentell bestimmt und im äquatorialen Koordinatensystem angegeben. Der Tg. der harten Komponente entsteht aus primären Teilchen mit Energien > 7 Gev. Für Partikel mit Energien größer 30 Gev ist die Beeinflussung durch elektrische Felder vernachlässigbar und der Tg. praktisch nicht vorhanden. Der Energiebereich 7 bis 30 Gev wird in drei Teile unterteilt, und zwar 7 bis 15, 15 bis 22, 22 bis 30 Gev, um den Einfluß der einzelnen Energiebereiche auf den gesamten Tg. zu finden. Es wird ziemlich willkürlich angenommen, daß die den Tg. erzeugenden Teilchen (7 bis 30 Gev) im Registriergerät nur aus dem Zenithwinkelbereich 0° bis 30° einfallen. Eine Abänderung dieser Annahme ändert nicht wesentlich die Ergebnisse. Außerdem ist infolge der Geometrie des kubischen Zählrohrteleskops der größtmögliche Zenithwinkel nur 54^0. Die Streamdaten für die drei Energiebereiche werden in die Kurven von Brunberg eingetragen, so daß die Ablenkung im Erdfeld leicht berücksichtigt werden kann. Das Ergebnis ist folgende Figur (Abb. 4):

Für einen beliebig ausgesandten Stream $(\varphi, \psi, \varepsilon)$ wird r und s für die möglichen Winkel β zur Zeit t nach (7) berechnet und in Fig. 4 eingetragen. Der Schnitt dieser Kurve mit den Kurven *I*, *II*, *III* ergibt die Bereiche des Streams, die zur betreffenden Zeit beschleunigte bzw. verzögerte Teilchen dem Beobachtungsort zusenden. Beispielsweise wurde in Fig. 4 die Richtung zum Stream $\varphi = 10^0$, $\psi = 13^0$, $\varepsilon = 0^0$ zur Zeit $t = 0^h$ eingetragen. Bei Berücksichtigung von $E_{\min}$ und indem die Kurven für die verschiedenen Zeiten t eingetragen werden, kann das Maximum der relativen Erhöhung und somit die Amplitude und Phasenlage bestimmt werden.

Bei allen Berechnungen wurde als Streamgeschwindigkeit $u = 2 \cdot 10^8$ cm/sec gewählt. Größere Werte u treten selten auf und um eine Größenordnung kleinere Werte ergeben zu kleine Amplituden des Tg.

Die Phasenlage und Amplitude wurden für $\varepsilon = 0^0$, $\delta = 20^0$ und Magnetfeldabfall R^{-1} für die beiden Richtungen des magnetischen Feldes berechnet. Da die Sonne in derselben Richtung wie die Erde rotiert, bedeuten 1. in Abb. 5 vor und 2. nach einem magnetischen

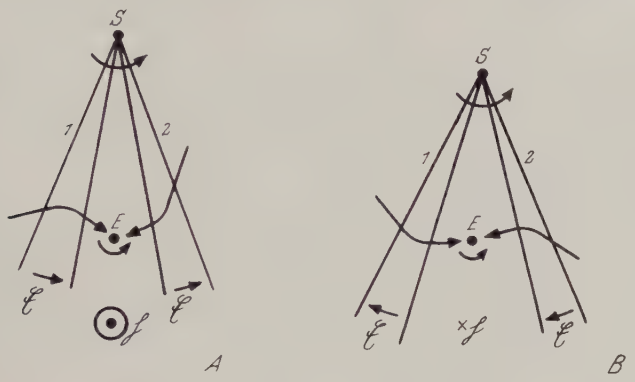

Abb. 5
1 ... $\psi < 0^0$
2 ... $\psi > 0^0$
⊙ ... aus der Ebene heraus gerichtet
× ... in die Ebene hinein gerichtet

Sturm. Das Ergebnis der durchgeführten Rechnungen bei Berücksichtigung der Geometrie des Zählrohrteleskops ist in Tab. 1 eingetragen. Kleinere Werte von $|\mathfrak{b}|_{\pm}^{\circlearrowleft}$ als in Tab. 1 angeführt wurden, ergeben zu kleine Amplituden des Tg. und größere $|\mathfrak{b}|_{\pm}^{\circlearrowleft}$ liefern wegen $E_{\min}$ keinen Tg. der harten Komponente. Die Amplitude der Neutronenkomponente wäre entsprechend kleiner.

Der schraffierte Bereich in Tab. 1 entspricht einem magnetischen Sturm. Es stimmen dann die für die Berechnung gemachten Ansätze (Ablenkung im Erdfeld, keine Störung des Erdfeldes durch das Streamfeld und umgekehrt, usw.) nicht mehr, so daß diese Werte ziemlich ungenau sind. Die Geraden in Tab. 1 berücksichtigen die Änderung von φ und ψ des mit der Sonne rotierenden Streams (pro Tag: $\Delta\psi = 13^0$, $\Delta\varphi = 5^0$) infolge der Neigung der Sonnenäquatorebene zur Erdäquatorebene.

Infolge des ähnlichen Verlaufs der Funktion $E_{\min}(\alpha, \beta, \delta)$ für alle δ, ist die Phasenlage und Amplitude praktisch von δ unabhängig. Ebenso ändert sich der Tg. nicht stark, wenn man statt R^{-1} Magnetfeldabfall R^{-2} nimmt. r und s sind für $\beta = -90^0$ unabhängig von ε [siehe (7)]. Da die Phasenlage für A1 und B2 (Abb. 5), die den Hauptteil der Tg. ausmachen, infolge des Verlaufs von $E_{\min}$ nahe $\beta = -90^0$ liegt, tritt im Laufe des Jahres trotz Änderung von ε keine Phasenlagenänderung des Tg. auf.

Folgerungen

Aus diesen Ergebnissen lassen sich einige Folgerungen ableiten:

1. Nach der Streamtheorie kann ein Tg. nur dann auftreten, wenn das Magnetfeld im Stream in Sonne-Erde-Entfernung 10^{-5} bis $3 \cdot 10^{-5}$ Gauß beträgt. Das bedeutet, daß das Feld an der Sonnenoberfläche am „Einfrierort" je nach Feldabfall $2 \cdot 10^{-3}$ bis 1 Gauß betragen muß. In den Sonnenflecken existieren Felder bis einige 1000 Gauß, so daß auch Felder mit viel größeren Feldstärken in den Stream eingefroren werden könnten. Damit der Tg. nicht ein sehr seltenes Ereignis wird, müßte ein Einfriermechanismus angenommen werden, der nur die betreffenden Feldstärken in den Stream bringt.

2. Phasenlage und Amplitude des Tg. ändern sich im Laufe eines Jahres. Nach Ansicht von Dorman kann der Hauptteil davon durch die meteorologischen Veränderungen der Atmosphäre im Laufe des Jahres (Temperatureffekt) verstanden werden. Jedoch ist ein kleiner Teil der jahreszeitlichen Schwankungen des Tg. außeratmosphärischen Ursprungs [1]. Da die Phasenlage praktisch von ε unabhängig ist, kann diese Theorie dieses Phänomen nicht erklären.

3. Die Phasenlage des Tg. macht einen 22-jährigen Zyklus durch. Die mittlere jährliche Phasenlage ändert sich systematisch für alle Stationen meist zwischen 12^h und 16^h, doch kommen auch Vormittagsmaxima vor. Da auch die Sonnenflecken eine 22-jährige Periode aufweisen (es ändert sich die Häufigkeit und die mittlere heliographische Breite der Flecken), kommt man auf die Idee eine Verbindung zwischen der heliographischen Breite der Flecken und der Phasenlage des Tg. zu suchen. Die Streams entstehen in Verbindung mit Sonnenflares, die immer in Aktivitätszentren, speziell im Zentralbereich der Sonnenfleckengruppen oder zwischen den zwei bipolaren Sonnenflecken einer Fleckengruppe erscheinen. Das bedeutet eine enge Beziehung zwischen den Streamausbruchsstellen und der mittleren heliographischen Breite der Flecken, das heißt der mittlere Winkel φ ändert sich im Laufe eines 22-jährigen Zyklus. Nach Tab. 1 ist aber die Phasenänderung für verschiedene φ ziemlich klein.

4. Aus Tab. 1 wird die Häufigkeit der Tg. in Abhängigkeit von der Phasenlage bestimmt. Die 24 Stunden des Tages werden in 12 Teile geteilt (0^h bis 2^h, 2^h bis 4^h, ...). In jedem Bereich werden die Anzahl der Tg., die mit der Amplitude als Gewicht multipliziert werden, gezählt und in Abhängigkeit von der Zeit in ein Diagramm eingetragen. Das Entsprechende geschieht auch mit den Ergebnissen der Messungen vom Hafelekar [4]. Die theoretischen und experimentellen Kurven stimmen nicht überein (Abb. 6). Aus der theoretischen Häufigkeitsverteilung folgt, daß eine Mittelwertbildung der Tg. die Amplitude stark verkleinert.

5. Sekido und Yoshida stellten fest, daß die Amplitude bei und *nach* magnetischen Stürmen zirka doppelt so hoch ist als im Normalfall [5]. Nach der Theorie gibt es eine Tages- und eine Nachtkomponente

Tabelle 1. Tagesgang für $\varepsilon = 0^0$; $\delta = 20^0$

$\lvert\mathfrak{h}\rvert_{\mathfrak{P}}$ (Gauß)	$\psi =$	-53^0	-40^0	-27^0	-13^0	0^0	$+13^0$	$+27^0$
10^{-5}		14^h 0,1%	$14^h40'$ 0,1%	16^h 0,1%	19^h 0,1%	—	$19^h20'$ 0,4%	$19^h20'$ 0,3%
$2 \cdot 10^{-5}$		14^h 0,4%	$14^h40'$ 0,2%	16^h 0,2%	19^h 0,1%		—	—
$3 \cdot 10^{-5}$		14^h 0,3%	$14^h40'$ 0,4%	16^h 0,4%	19^h 0,1%	—	—	—
10^{-5}		$13^h20'$ 0,4%	$14^h20'$ 0,5%	16^h 0,3%	$17^h20'$ 0,1%	—	18^h 0,3%	18^h 0,3%
$2 \cdot 10^{-5}$		$13^h20'$ 0,4%	$14^h40'$ 0,6%	16^h 0,5%	$17^h20'$ 0,1%		—	
$3 \cdot 10^{-5}$		$13^h20'$ 0,3%	$14^h40'$ 0,5%	16^h 0,5%	$17^h20'$ 0,4%	—	—	—
10^{-5}		$12^h40'$ 0,4%	14^h 0,6%	$14^h40'$ 0,7%	$16^h40'$ 0,6%	$19^h40'$ 0,1%	18^h 0,4%	$16^h40'$ 0,3%
$2 \cdot 10^{-5}$		14^h 0,4%	15^h 0,6%	16^h 1,0%	$16^h40'$ 0,8%	$19^h40'$ 0,2%	—	
$3 \cdot 10^{-5}$		14^h 0,3%	$15^h20'$ 0,4%	16^h 0,5%	$16^h40'$ 0,6%	$19^h40'$ 0,2%	—	—
10^{-5}		$12^h40'$ 0,3%	$13^h20'$ 0,4%	14^h 0,7%	$15^h20'$ 0,9%	21^h 0,4%	18^h 0,6%	18^h 0,3%
$2 \cdot 10^{-5}$		$13^h20'$ 0,2%	$14^h40'$ 0,3%	$15^h20'$ 0,6%	$15^h20'$ 0,7%	21^h 0,6%		—
$3 \cdot 10^{-5}$		—	—	$15^h20'$ 0,3%	$16^h40'$ 0,5%	21^h 0,6%	—	—

φ	-27^0	-13^0	0^0	$+13^0$	$+27^0$	$+40^0$	$+53^0$
30^0	22^h 0,3%	$21^h20'$ 0,4%	—	23^h 0,1%	$1^h40'$ 0,1%	3^h 0,1%	4^h 0,3%
				23^h 0,1%	$1^h40'$ 0,2%	3^h 0,2%	4^h 0,3%
	—	—	—	23^h 0,2%	$1^h40'$ 0,3%	3^h 0,4%	4^h 0,3%
20^0	22^h 0,3%	22^h 0,4%	—	$0^h40'$ 0,1%	2^h 0,3%	$2^h40'$ 0,5%	$3^h20'$ 0,4%
		—		$0^h40'$ 0,2%	2^h 0,5%	$2^h40'$ 0,5%	$3^h20'$ 0,4%
	—	—	—	$0^h40'$ 0,4%	2^h 0,5%	$2^h40'$ 0,5%	$3^h20'$ 0,3%
10^0	$23^h20'$ 0,3%	$22^h40'$ 0,3%	$19^h40'$ 0,1%	$22^h40'$ 0,4%	$0^h40'$ 0,7%	2^h 0,5%	$2^h40'$ 0,4%
		—	$19^h40'$ 0,2%	0^h 0,7%	$0^h40'$ 0,7%	2^h 0,5%	$2^h40'$ 0,4%
	—	—	$19^h40'$ 0,2%	0^h 0,6%	$0^h40'$ 0,4%	2^h 0,4%	$2^h40'$ 0,3%
5^0	2^h 0,2%	0^h 0,4%	21^h 0,4%	$0^h20'$ 0,9%	$1^h20'$ 0,8%	$1^h40'$ 0,5%	$2^h40'$ 0,3%
	—		21^h 0,6%	$0^h20'$ 0,9%	$1^h20'$ 0,6%	$1^h40'$ 0,4%	$2^h40'$ 0,2%
	—	—	21^h 0,6%	$0^h20'$ 0,5%	$1^h20'$ 0,4%	$1^h40'$ 0,2%	—

1. Zeile Phasenlage, 2. Zeile doppelte Amplitude des Tg.

(Stellung A bzw. B in Abb. 5). Wird angenommen, daß nur die Tageskomponente auftritt, da Nachtmaxima der Tg. selten vorkommen, so ergibt sich eine weitere Diskrepanz mit der Beobachtung, denn bei der Tageskomponente sollten *vor* einem magnetischen Sturm viel größere Amplituden auftreten als nachher. Bei der Nachtkomponente, die jedoch selten beobachtet wird, ist es umgekehrt. Die großen Amplituden treten nach dem magnetischen Sturm auf.

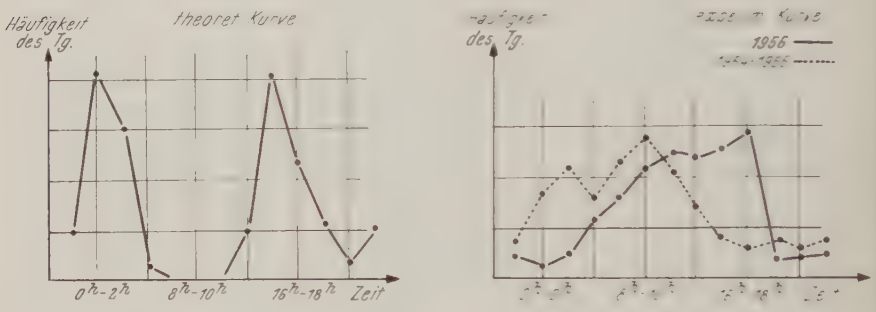

Abb. 6

6. Nach Tab. 1 ändert sich die Phasenlage im Laufe mehrerer Tage schwach. Die Theorie kann daher auch die häufig auftretenden Sprünge der Phasenlage im Laufe von einigen Tagen nicht erklären.

Es ist daher sehr unwahrscheinlich, daß die Tg. (oder zumindest der Großteil davon) nach dieser Theorie in der bestehenden Form erklärt werden können.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. R. Steinmaurer und Frau Doz. Dr. H. Gheri für die Korrektur des Manuskripts, für ihr stets vorhandenes Interesse und ihre Hilfsbereitschaft danken. Außerdem danke ich dem Mathematischen Labor der Techn. Hochschule in Wien für die numerische Auswertung der Formel (7).

Anhang

Beweis von

$$\bar{D}(E) = D(E)\left(1 + (2+\gamma)\frac{dE}{E}\right)$$

Es gilt:

$$J(\pi) = \frac{dN}{d\tau}|\mathfrak{w}^2|^{1/2}\cdot\pi^2$$

$J(\pi)\,d\pi$ ist die Intensität der Strahlung, also Anzahl der Teilchen mit einem Impuls zwischen π und $\pi + d\pi$ pro cm² sec sterr, $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit der entsprechenden Partikel und dN die Anzahl der Teilchen im Volumelement $d\tau$ des 6-dimensionalen μ-Phasenraumes.

$J(\pi)$ ändert sich in einem elektrischen und magnetischen Feld $(\mathfrak{E}, \mathfrak{h})$ im Zeitelement dt auf $\bar{J}(\pi + d\pi)$.

Die Bewegungsgleichung für ein Teilchen lautet:

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\,\mathfrak{w}}{\left(1-\frac{\mathfrak{w}^2}{c^2}\right)^{1/2}} = e\,\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{h}]$$

Daher ändern sich der Impuls π und der Ort σ des Teilchens nach dt auf

$$\bar{\pi} = \pi + e\cdot\mathfrak{E}(\sigma)\,dt + \frac{e}{c}\,[\pi\,\mathfrak{h}(\sigma)]\,\frac{c}{(m_0{}^2c^2+\pi^2)^{1/2}}\cdot dt$$

$$\bar{\sigma} = \sigma + \pi\cdot\frac{c\cdot dt}{(m_0{}^2c^2+\pi^2)^{1/2}}$$

Das Volumelement $d\tau = d\pi_x\cdot d\pi_y\cdot d\pi_z\cdot d\sigma_x\cdot d\sigma_y\cdot d\sigma_z$ ist in den Koordinaten $\bar{\pi}$ und $\bar{\sigma}$ geschrieben $d\tau = d\bar{\pi}_x\cdot\ldots \equiv d\bar{\tau}$, da die Funktionaldeterminante bis auf Glieder höherer Ordnung als erster, gleich 1 ist. Daher ist

$$\bar{J}(\pi + d\pi) = \frac{dN}{d\bar{\tau}}\,|(\mathfrak{w}+d\mathfrak{w})^2|^{1/2}\cdot(\pi+d\pi)^2$$

Für $d\mathfrak{w}$ und $d\pi$ eingesetzt, ergibt sich bei Einführung der Energie $dE = e(\mathfrak{E}\,\mathfrak{w})\,dt$ und bei extrem relativistischer Näherung:

$$\bar{J}(\pi + d\pi) = J(\pi)\left(1 + 2\frac{dE}{E}\right)$$

Umgerechnet auf $D(E)$ (Intensität bezogen auf die Energie E) bei $J(\pi) = D(E)\cdot c$ ergibt

$$\bar{D}(E + dE) = D(E)\left(1 + 2\frac{dE}{E}\right)$$

Da die Intensität der primären k.S. durch $D(E) = A\cdot E^{-\gamma}$ (A, $\gamma = 2{,}7$ sind Konstante) gegeben ist [1], ergibt sich

$$\bar{D}(E) = D(E)\left(1 + (2+\gamma)\frac{dE}{E}\right)$$

Literatur

1. Dorman, L. I., Cosmic Ray Variations (Moscow, 1957). (Engl. Übersetzung: Wright-Patterson Air Force Base Ohio 1958.)
2. Alfvén, H., Cosmical Electrodynamics (Clarendon Press Oxford 1953).
3. Brunberg, E. A., Tellus 8, 215 (1956).
4. Girgis, A. H., Dissertation Innsbruck (unveröffentlicht, 1960).
5. Sekido, Y., S. Yoshida, Rep. Jon. Res. Japan 4, 37 (1950).
6. Nagashima, K., J. Geom. and Geoelect. 7, 51 (1955).
7. Nagashima, K., Proceedings of the Moscow Cosmic Ray Conference Vol. IV, 240 (1960).

Der Beitrag indirekter Prozesse zum Λ_{e3}-Zerfall

Von

Dieter Flamm

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

Mit 1 Abbildung

(*Eingegangen am 25. Oktober 1960*)

1. Einleitung und Zusammenfassung

Die universelle Fermiwechselwirkung (UFI) [1], die sich beim β-Zerfall des Neutrons und beim μ-Zerfall so glänzend bewährt hat und die auch die π- und K-Zerfälle qualitativ erklärt [2], versagt erstmals bei ihrer Ausdehnung auf die Zerfälle der Hyperonen. Ihre Anwendung auf den einfachsten Zerfall dieser Art, den Λ_{e3}-Zerfall ($\Lambda \to P + e^- + \bar{\nu}$), ergibt etwa das Zehnfache des experimentellen Wertes [3], [4], wenn man mit UFI ohne Berücksichtigung der starken Wechselwirkungen rechnet (Graph I). Aus diesem Grunde ist es wünschenswert, über den Beitrag

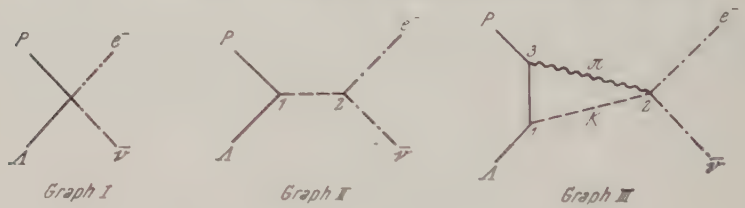

Abb. 1

von Termen der S-Matrix, die von erster und höherer Ordnung in den starken Wechselwirkungen sind, Aufschluß zu bekommen. Kraft seiner starken K-Meson-Kopplung kann sich das Λ-Teilchen für kurze Zeit in ein Proton und ein virtuelles K-Meson aufspalten. Das K-Meson kann K_{e2}-Zerfall ($K^- \to e^- + \bar{\nu}$), Graph II, oder K_{e3}-Zerfall ($K \to \pi + e^- + \bar{\nu}$), Graph III, erleiden und so zum Λ_{e3}-Zerfall führen. In den Punkten 2 von Graph II und Graph III wirken die effektiven HAMILTON-Dichten Gl. (1), bzw. (5), deren Gestalt und Kopplungskonstanten wir einer phänomenologischen Behandlung des K_{e2}-, bzw. K_{e3}-Zerfalles entnehmen können. Die obigen Zerfallsmechanismen, Graph II und III,

existieren ungeachtet dessen, ob es für Hyperonen die universelle Vektor-Axialvektor(V-A)-Kopplung (auch UFI genannt) gibt oder nicht. Nehmen wir ihre Existenz als gegeben an und führen den K_{e2}- und K_{e3}-Zerfall durch Baryon-Antibarionschlingen auf die UFI zurück [2], so lassen sich Graph II und III als höhere Näherungen in H_k Gl. (15) und H_m Gl. (20) zu Graph I deuten. Es wäre dann auch der Austausch von 2 und mehr π-Mesonen zwischen den Punkten 2 und 3 denkbar. Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit für K_{e4}- und K_{e3}-Zerfall wurde zu $W(K^- \to \pi^0 + \pi^0 + e^- + \tilde{\nu})/W(K^- \to \pi^0 + e^- + \tilde{\nu}) = 10^{-3}$ bis 10^{-4} abgeschätzt [5].

Der Beitrag von Graph II zum Λ_{e3}-Zerfall ergibt sich um viele Größenordnungen zu klein. Für Graph III mit pseudovektorieller K-Mesonkopplung ergibt sich ein Beitrag von 10% bis 20% des experimentellen Wertes (vgl. Tab. 1 u. f.). Der Beitrag von Graph III zeigt keine Winkelasymmetrie in Bezug auf den Λ-Spin. Graph III ist nicht im Stande den gesamten Λ_{e3}-Zerfall zu erklären; auch reicht er nicht aus, um durch Interferenz mit Graph I zu klären, warum der experimentelle Wert viel kleiner ist, als der mit UFI und Graph I berechnete Wert. Übereinstimmung mit dem Experiment wird erreicht, wenn wir annehmen, daß für die Fermionpaare (LP) und $(e\nu)$ zwar eine schwache V-A-Wechselwirkung besteht, ihre Kopplungskonstante aber nur etwa ein Drittel der Konstante g_β des μ- und β-Zerfalls beträgt.

2. K_{e2} und $K_{\mu 2}$-Zerfall

Der K_{e2}-Zerfall wurde zwar noch nicht beobachtet, seine Existenz ist aber sehr wahrscheinlich, denn wie bei den entsprechenden π-Zerfällen ist seine Zerfallsrate um viele Zehnerpotenzen kleiner als die für den $K_{\mu 2}$-Zerfall. Wegen LORENTZ-Invarianz muß die effektive HAMILTON-dichte für die beiden Zerfälle die Gestalt (1) haben.

$$H_{\text{eff}}' = h\,\bar{\psi}_L(x)\,\gamma_\mu\,(1+\gamma_5)\,\psi_\nu(x)\,\partial^\mu \varphi_K(x) \qquad (L = e^- \text{ oder } \mu^-) \tag{1}$$

Aus (1) erhalten wir das S-Matrixelement im Impulsraum zu

$$S_{ab} = -i\,\frac{h}{\sqrt{4\pi\, p_K{}^0}}\,\bar{u}_L\,(p_K\gamma)\,(1+\gamma_5)\,u_\nu\,\delta(p_K - p_L - p_\nu) \tag{2}$$

und hieraus die Zerfallswahrscheinlichkeit

$$W = \frac{h^2}{\pi}\,\frac{m_L{}^2}{m_K}\left(\frac{m_K{}^2 - m_L{}^2}{2\,m_K}\right)^2 \tag{3}$$

Aus (3) folgt das Verhältnis von K_{e2}- zu $K_{\mu 2}$-Zerfall

$$\frac{W(K^- \to e^- + \tilde{\nu})}{W(K^- \to \mu^- + \tilde{\nu})} = \frac{m_e{}^2}{m_\mu{}^2}\left(\frac{m_K{}^2 - m_e{}^2}{m_K{}^2 - m_\mu{}^2}\right)^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$$

Für die effektive Kopplungskonstante h erhalten wir aus (3), wenn wir für $W(K_{\mu 2}) = 48 \cdot 10^6\,\text{sec}^{-1}$ [6] einsetzen

$$h^2 = 3{,}29 \cdot 10^{-41}\,\text{cm}^2. \tag{4}$$

3. Der K_{e3}-Zerfall

Zwei weitere elektronische K-Zerfälle sind $K^- \to \pi^0 + e^- + \bar{\nu}$ und $K^0 \to \pi^+ + e^- + \bar{\nu}$. Sie können mit derselben effektiven HAMILTON-Dichte behandelt werden, nur sind die effektiven Kopplungskonstanten verschieden, und zwar ist die Kopplungskonstante für den $K^0{}_{e3}$-Zerfall $\sqrt{2}$ mal größer. Dieses Verhältnis ist aus Isotopenspin-Auswahlregeln gewonnen [7].

Wir setzen die HAMILTON-Dichte gleich in einer für die Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit im Schwerpunktsystem günstigen Form an

$$H_{\text{eff}} = f\, m_e\, \bar{\psi}_e(x)\,(1+\gamma_5)\,\psi_\nu(x)\,\varphi_\pi(x)\,\varphi_K(x) + \\ + g\,\bar{\psi}_e(x)\,\gamma_\lambda\,(1+\gamma_5)\,\psi_\nu(x)\,\varphi_\pi(x)\,\partial^\lambda \varphi_K(x) \tag{5}$$

Dieser Ansatz ist auch hinreichend allgemein, wenn wir uns auf Skalar, Pseudoskalar, Vektor und Axialvektor-Kopplung in der Kombination $1+\gamma_5$ beschränken, denn in erster Ordnung der Störungstheorie, in der wir mit effektiven Kopplungen rechnen, lassen sich Terme der Form

$$\bar{\psi}_e\,\gamma_\lambda\,(1+\gamma_5)\,\psi_\nu\varphi_K\,\partial^\lambda\varphi_\pi(x)$$

auf die Terme, die in (5) enthalten sind, zurückführen. Das stimmt auch noch, wenn die Bosonen virtuell sind.

Man erhält diesen Ausdruck auch, wenn man den K_{e3}-Zerfall mit universeller V-A-Theorie und Baryon-Antibaryonschlingen berechnet [2], [8]. Dabei ergibt sich überdies, daß f und g etwa von gleicher Größenordnung sind, was wir im folgenden auch annehmen wollen.

Das S-Matrixelement zu (5) lautet

$$S = -\frac{i}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_K{}^0\, p_\pi{}^0}}\{-g\,p_K{}^\lambda\,\bar{u}_e(\vec{p}_e)\,\gamma_\lambda\,(1+\gamma_5)\,u_\nu(\vec{p}_\nu) + \\ + f\,m_e\,\bar{u}_e(\vec{p}_e)\,(1+\gamma_5)\,u_\nu(\vec{p}_\nu)\}\,\delta(p_K - p_\pi - p_e - p_\nu) \tag{6}$$

Aus (6) erhalten wir als Zwischenresultat das Energiespektrum des K_{e3}-Zerfalles

$$\frac{d^2W\,(K\to e+\pi+\nu)}{dE_\pi\,dE_e} = \frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{2\,m_K}\cdot \\ \cdot\{g^2\,m_K{}^2\,(4\,E_e\,E_\nu - m_K{}^2 - m_\pi{}^2 + 2\,m_K\,E_\pi) + \\ + f^2\,m_e{}^2\,(m_K{}^2 + m_\pi{}^2 - m_e{}^2 - 2\,m_K\,E_\pi) - 2\,f\,g\,m_e\,m_K\,(2\,m_e\,E_\nu)\} \tag{7}$$

wobei E_e, E_π, E_ν die Teilchenenergien bedeuten. Wenn f und g von gleicher Größenordnung sind, ist das zweite und dritte Glied in (7) etwa $(m_e/m_K)^2$ mal kleiner und kann vernachlässigt werden. Durch Integration folgt die Gesamtwahrscheinlichkeit

$$W = g^2\,\frac{1}{(2\pi)^3}\cdot\frac{m_K}{4}\left\{\frac{1}{3}\,p_\pi{}'^3\,p_\pi{}^{0\prime} - m_\pi{}^2\left(p_\pi{}'\,p_\pi{}^{0\prime} + \frac{m_\pi{}^2}{2}\ln\frac{m_\pi}{m_K}\right)\right\} \tag{8}$$

worin

$$p_\pi' = \frac{m_K^2 - m_\pi^2}{2\, m_K} = 447{,}2\, m_e$$

den maximalen Impuls und

$$p_\pi^{0\prime} = \frac{m_K^2 + m_\pi^2}{2\, m_K} = 519{,}5\, m_e$$

die maximale Energie des π-Mesons im K-Meson Ruhsystem bedeuten. Setzen wir für $W(K^- \to e^- + \pi^0 + \bar{\nu}) = 3{,}42 \cdot 10^6\ \mathrm{sec}^{-1}$ [6] in (8) ein, so erhalten wir

$$g = 0{,}93 \cdot 10^{-33}\ \mathrm{cm}^2 \tag{9}$$

oder in natürlichen Einheiten $\hbar = c = 1$

$$g = 0{,}21 \cdot 10^{-5}/\mathrm{m}^2$$

was ungefähr ein Drittel der UFI-Kopplungskonstante

$$g = 0{,}714 \cdot 10^{-5}/\mathrm{m}^2$$

ist.

4. Der Λ_{e3}-Zerfall mit UFI

Graph I mit der Hamilton-Dichte

$$H = g_F\, \bar{\psi}_P\, \gamma_\lambda\, (1 + \gamma_5)\, \psi_\Lambda\, \bar{\psi}_e\, \gamma^\lambda\, (1 + \gamma_5)\, \psi_\nu(x) \tag{10}$$

ergibt für das S-Matrixelement im Impulsraum

$$S = -\,i\, \frac{1}{(2\pi)^2}\, g_F\, \bar{w}_P\, \gamma_\lambda\, (1 + \gamma_5)\, w_\Lambda\, \bar{u}_e\, \gamma^\lambda\, (1 + \gamma_5)\, u_\nu\, \delta(p_\Lambda - p - p_e - p_{\bar{\nu}}) \tag{11}$$

Bilden wir daraus die Wahrscheinlichkeitsdichte, summieren über die Spins der Endprodukte und mitteln über den Λ Spin, so folgt

$$\sum_{s_b} w_{ab} = \frac{1}{(2\pi)^5}\, g_F^2\, 4 \left[\frac{\not{p}\, \not{p}_e}{p^0\, p_e^{\,0}} + \frac{\not{p}\, \not{p}_\nu}{p^0\, p_\nu^{\,0}} \right] \delta(p_\Lambda - p - p_e - p_{\bar{\nu}}) \tag{12}$$

nach Integration über die Endzustände ergibt sich

$$W = \frac{g_F^2}{4\pi^3}\, m_\Lambda \left\{ \frac{2}{3}\, p_0'^3\, p'^3 - m^2 \left(p'\, p_0' - m^2 \ln \frac{m_\Lambda}{m} \right) \right\} \tag{13}$$

In (13) bedeutet

$$p^{0\prime} = \frac{m_\Lambda^2 + m^2}{2\, m_\Lambda} = 1863{,}59\, m_e \tag{14}$$

die maximale Energie und

$$p' = \frac{m_\Lambda^2 - m^2}{2\, m_\Lambda} = 318{,}91\, m_e \tag{14 a}$$

den maximalen Impuls des Protons im Λ-Ruhsystem. Die numerische Ausrechnung von (13) ergibt $W(\Lambda \to P + e^- + \bar{\nu}) = 5{,}8 \cdot 10^7\ \mathrm{sec}^{-1}$.

Setzten wir in (13) $m_1 = m_\mu$ und $m = 0$, so erhalten wir daraus die Formel für den μ-Zerfall:

$$W = \frac{g_F^2 m_\mu^5}{96\pi^3} = 4{,}43 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}.$$

5. Der Λ_{e3}-Zerfall nach Graph II

Graph II mit der HAMILTON-Dichte H_K

$$H_K = g_K \bar{\psi}_P \gamma_5 \psi_\Lambda \varphi_K(x) \qquad \frac{g_K^2}{4\pi} = 1 \tag{15}$$

oder

$$H_K' = \frac{g_K}{m + m_\Lambda} \bar{\psi}_P \gamma_\lambda \gamma_5 \psi_\Lambda \, \partial^\lambda \varphi_K(x) \tag{15 a}$$

in Punkt 1 und $H_{\text{eff}}'(1)$ in Punkt 2 gibt das S-Matrixelement im Schwerpunktsystem:

$$S = -i \frac{h g_K}{(2\pi)^2} \bar{w}_P \gamma_5 w_\Lambda \bar{u}_e (1 + \gamma_5) u_\nu K \tag{16}$$

$$K = \frac{m_e}{2 m_\Lambda (p^{0\prime} - p^0) - m_K^2}$$

K schwankt um weniger als 7% um seinen Mittelwert, den wir im weiteren einsetzen. Für die Gesamtwahrscheinlichkeit des Zerfalls ergibt sich daraus

$$W = \frac{h^2}{(2\pi)^2} \frac{g_K^2}{4\pi} |K|^2 m_\Lambda \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{3} p_0' p'^3 - 2m \left(p_0' + \frac{1}{4} m \right) \left(p' p_0' - m^2 \ln \frac{m_\Lambda}{m} \right) \right\} \tag{17}$$

Nach Einsetzen numerischer Werte folgt aus (17) $W = 48 \text{ sec}^{-1}$, was um mehrere Ordnungen zu klein ist.

6. Das S-Matrixelement zu Graph III

Setzen wir in Punkt 1 von Graph III die pseudoskalare K-Mesonkopplung H_K (15), in Punkt 2 H_{eff} (5) und in Punkt 3:

$$H_\pi = g_\pi \bar{\psi}_P \gamma_5 \psi_N \varphi_\pi(x) \qquad \frac{g_\pi^2}{4\pi} = 13{,}5 \tag{18}$$

so ergibt sich das S-Matrixelement zu ($p_1 = p_\Lambda - p_K = p - p_\pi$)

$$S = \frac{g_\pi g_K}{(2\pi)^6} \int d^4 p_1 \, \bar{w}_P(\vec{p}) \gamma_5 \frac{(p_1 \gamma) + m}{p_1^2 - m^2} \gamma_5 w_\Lambda(\vec{p}_\Lambda) \cdot$$

$$\cdot \{ g \bar{u}_e(\vec{p}_e) [(p_1 \gamma) - (p_\Lambda \gamma)] (1 + \gamma_5) u_\nu(\vec{p}_\nu) + f m_e \bar{u}_e(\vec{p}_e) (1 + \gamma_5) u_\nu(\vec{p}_\nu) \} \cdot$$

$$\frac{1}{(p_\Lambda - p_1)^2 - m_K^2} \cdot \frac{1}{(p - p_1)^2 - m_\pi^2} \delta(p_\Lambda - p - p_e - p_\nu) \tag{19}$$

Darin kommen drei Integrale der Form

$$\int d^4p_1 \frac{(1; p_1^\lambda; p_1^\lambda p_1^\mu)}{[p_1^2 - m^2]\,[(p_\Lambda - p_1)^2 - m_K^2]\,[(p - p_1)^2 - m_\pi^2]} = (I; I^\lambda; I^{\lambda\mu}) \tag{20}$$

vor, die im Anhang behandelt werden.

Wie die Ausrechnung zeigt, was aber auch schon eine einfache Überlegung ergibt, lassen sie sich folgendermaßen aufspalten:

$$\frac{i}{\pi^2} I = J$$

$$\frac{i}{\pi^2} I^\lambda = p_\Lambda^\lambda U + p^\lambda V \tag{21}$$

$$\frac{i}{\pi^2} I^{\lambda\mu} = p^\lambda p^\mu O + (p_\Lambda^\lambda p^\mu + p_\Lambda^\mu p^\lambda) P + p_\Lambda^\lambda p_\Lambda^\mu Q + g^{\mu\lambda} R$$

Führen wir noch die Abkürzungen

$$\begin{aligned} F &= m(J - V) - m_\Lambda U \\ G &= m(V - O) - m_\Lambda P \\ H &= m_\Lambda m(U + 2V - O - P - J) + m_\Lambda^2 (U - P - Q) \end{aligned} \tag{22}$$

ein, so folgt nach einigen Umformungen aus (19) mit (20) und (21) Gleichung (23).

$$\begin{aligned} S = -i \frac{g_\pi g_K}{4(2\pi)^4} \{ &\bar{w}_P w_\Lambda \bar{u}_e (1 + \gamma_5) u_\nu m_e (f F - g G) + \\ &+ g H \bar{w}_P w_\Lambda \bar{u}_e \gamma_0 (1 + \gamma_5) u_\nu - R g \bar{w}_P \gamma^\mu w_\Lambda \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu \} \cdot \\ &\cdot \delta(p_\Lambda - p - p_e - p_\nu) \end{aligned} \tag{23}$$

F, G und H sind reelle Funktionen von $(p_\Lambda - p)^2$, doch beträgt ihre Abhängigkeit nur zirka 10% und wir werden im folgenden mit ihren konstanten Werten für mittlere Energien rechnen. R enthält logarithmisch eine Abschneidlänge λ.

Setzen wir in Punkt 1 von Graph III anstatt der pseudoskalaren Kopplung (15) die Pseudovektorkopplung (15 a) ein, so erhalten wir für das S-Matrixelement anstatt (19)

$$\begin{aligned} S = \frac{g_\pi g_K}{(2\pi)^6} \int d^4p_1 \, &\bar{w}_P(\vec{p}) \,[(p_\Lambda \gamma) - (p_1 \gamma)]\, \gamma_5 \frac{(p_1 \gamma) + m}{p_1^2 - m^2} \gamma_5 w_\Lambda(\vec{p}_\Lambda) \cdot \\ \cdot \{ &g \bar{u}_e(\vec{p}_e) \,[(p_1 \gamma) - (p_\Lambda \gamma)]\, (1 + \gamma_5) u_\nu(\vec{p}_\nu) + f m_e \bar{u}_e(\vec{p}_e) (1 + \gamma_5) u_\nu(\vec{p}_\nu) \} \cdot \\ \cdot &\frac{1}{(p_\Lambda - p_1)^2 - m_K^2} \cdot \frac{1}{(p - p_1)^2 - m_\pi^2} \delta(p_\Lambda - p - p_e - p_\nu) \end{aligned} \tag{24}$$

In (24) tritt außer den Integralen (20) noch

$$I^{\lambda\mu\nu} = \int d^4p_1 \frac{p_1^\lambda p_1^\mu p_1^\nu}{(p_1^2 - m^2)\,([p_\Lambda - p_1]^2 - m_K^2)\,([p - p_1]^2 - m_\pi^2} \tag{25}$$

auf. (25) läßt sich in folgenden Ausdruck zerlegen:

$$I^{\lambda\mu\nu} = p_\Lambda{}^\lambda p_\Lambda{}^\mu p_\Lambda{}^\nu a_1 + (p_\Lambda{}^\lambda p_\Lambda{}^\mu p^\nu + p_\Lambda{}^\lambda p^\mu p_\Lambda{}^\nu + \ldots) a_2 + \\ + (p^\lambda p^\mu p_\Lambda{}^\nu + p^\lambda p_\Lambda{}^\mu p^\nu + \ldots) a_3 + p^\lambda p^\mu p^\nu a_4 + \\ + (p_\Lambda{}^\lambda g^{\mu\nu} + p_\Lambda{}^\mu g^{\lambda\nu} + \ldots) a_5 + (p^\lambda g^{\mu\nu} + p^\mu g^{\lambda\nu} + \ldots) a_6 \tag{26}$$

Mit (21), (22), (26) und den Abkürzungen (27) folgt nach einigen Umformungen mittels Dirac-Gleichung, Impulssatz und Vertauschungsrelationen für die γ-Matrizen wieder genau der Ausdruck (23), nur daß an die Stelle von F, G, H aus (22) F', G', H' aus (27) tritt. Für F', G', H' gilt dasselbe, was oben für F, G, H gesagt wurde.

$$(m_\Lambda + m) F' = m^2 O + 2 m_\Lambda p^0 P + m_\Lambda{}^2 Q + \\ + 4 R - (m_\Lambda + m)(m_\Lambda U + m V) + m_\Lambda m J \\ (m_\Lambda + m) G' = -6 a_6 - (a_2 m_\Lambda{}^2 + 2 a_3 p^0 m_\Lambda + m^2 a_4) + \\ + (m_\Lambda + m)(m O + m_\Lambda P) - m_\Lambda m V \tag{27}$$

$$H' = \frac{m_\Lambda}{m_\Lambda + m} \{6 (a_5 + a_6) + m_\Lambda{}^2 (a_1 + a_2) + 2 m_\Lambda p^0 (a_2 + a_3) + \\ + m^2 (a_3 + a_4) - (m^2 O + 2 m p^0 P + m^2 Q + 4 R) + \\ + m_\Lambda m (U + V - J)\} - m_\Lambda \{m_m (P + Q - U) + m (O + P - V)\}$$

Setzt man anstatt für das K-Meson in Punkt 1 für das π-Meson in Punkt 3 Pseudovektorkopplung ein, so ergibt sich ebenfalls ein zu (23) analoger Ausdruck.

7. Die Zerfallswahrscheinlichkeit nach Graph III

Aus (23) bilden wir die Wahrscheinlichkeitsdichte und summieren über die Spins der Zerfallsprodukte. Der erste Term in (23) ist etwa um einen Faktor $m_e m_\Lambda$ kleiner als der zweite; wir können ihn daher vernachlässigen. Weiters zeigt die Rechnung, daß die von der Λ-Spinrichtung abhängigen Terme verschwinden. Dies müssen sie auch, weil an Λ-Teilchen und Proton in Graph III nur starke Wechselwirkungen angreifen. Wir können diese Terme daher gleich weglassen, indem wir über den Λ Spin mitteln. Es folgt

$$\sum_{s_\Lambda} w_{ab} = \frac{g_\pi{}^2 g_k{}^2 g^2}{(2\pi)^9 2^3} \left\{ H^2 \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{p^0}\right) \left(2 - \frac{p_e p_\nu}{p_e{}^0 p_\nu{}^0}\right) \right. \\ + R^2 \left(\frac{p_e p}{p_e{}^0 p^0} + \frac{p_\nu p}{p_\nu{}^0 p^0} - \frac{m}{p^0} \frac{p_e p_\nu}{p_e{}^0 p_\nu{}^0} \right) + H R \cdot \\ \left. \left(\frac{p p_\nu}{p^0 p_\nu{}^0} + \frac{p p_e}{p^0 p_e{}^0} - \left(1 + \frac{m}{p^0}\right) \frac{p_e p_\nu}{p_e{}^0 p_\nu{}^0} + 2 \frac{m}{p^0} \right) \right\} \delta(p_\Lambda - p - p_e - p_\nu) \tag{28}$$

Ein Vergleich von (28) mit (12) zeigt, daß der Impulsterm des ausschlaggebenden Gliedes mit R^2 aus (28) schon abgesehen von den weiteren Koeffizienten kleiner ist als der entsprechende Term in (12).

Führen wir die Integration über die Winkel aus, so erhalten wir als Zwischenresultat das Energiespektrum des Zerfalls (29).

$$\frac{d^2W(\Lambda \to P + e^- + \bar{\nu})}{dE_P\, dE_\nu} = \frac{g_\pi^2\, g_K^2\, g^2}{(2\pi)^7\, 2^3} \{(G-H)^2\, m^2\, (m + E_P) \cdot$$
$$\cdot [E_\nu E_e - \tfrac{1}{2}(E_\nu^2 + E_e^2 - E_P^2 + m^2)] + R^2 [4 E_P^2 E_e E_\nu -$$
$$- E_\nu (E_\nu^2 - E_e^2 - E_P^2 + m^2) - 2 m E E_e - m (E_\nu^2 + E_e^2 - E_P^2 + m^2) +$$
$$+ E_e (E_\nu^2 - E_e^2 + E_P^2 - m^2)] - (G+H) R m_\Lambda [2 E_P E_e E -$$
$$- E_\nu (E_\nu^2 + E_e^2 - E_P^2 + m^2) + E_e (E_\nu^2 - E_e^2 + E_P^2 - m^2) -$$
$$(m + E_P)(E_\nu^2 + E_e^2 - E_P^2 + m^2) + 2 m E_\nu E_e]\} \qquad (29)$$

E_P, E_e, E_ν bedeuten die Teilchenenergien. Integration liefert die Gesamtwahrscheinlichkeit des Prozesses:

$$W = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{g_\pi^2}{4\pi} \frac{g_K^2}{4\pi} \frac{g^2}{4} \left\{ \frac{2}{3} H^2 \frac{p'^5}{5} + \left[\frac{2}{3} m H^2 - \frac{4}{3} (m_\Lambda + m) H R \right] \cdot \right.$$
$$\cdot \frac{1}{8} \left[2 p'^3 p^{0\prime} - 3 m^2 \left(p' p_0' - m^2 \ln \frac{m_\Lambda}{m} \right) + \right. \qquad (30)$$
$$\left. \left. + R^2 m_\Lambda \left[\frac{2}{3} (p_0' + 2m) p'^3 - m (2 p_0' + m) \left(p_0' p' - m^2 \ln \frac{m_\Lambda}{m} \right) \right] \right] \right\}$$

Für p_0' und p' siehe (14) und (14 a), für H, H' und R (22), (27) und (A 8). Das Einsetzen numerischer Werte in (30) ergibt Tab. 1 [9].

Tabelle 1. $W(\Lambda \to P + e^- + \bar{\nu})$ sec^{-1}

Theoretischer Wert nach UFI $5{,}8 \cdot 10^7$		
Experimenteller Wert $7{,}6 \cdot 10^6$		
"cut off" λ	Theoretischer Wert für	
	pseudovektorielle	pseudoskalare
	K-Meson-Kopplung	
5 m	$2{,}04 \cdot 10^5$	$5{,}57 \cdot 10^4$
10 m	$3{,}03 \cdot 10^5$	$9{,}66 \cdot 10^4$
100 m	$8{,}99 \cdot 10^5$	$4{,}92 \cdot 10^5$

Zerfallsraten nach Graph III für verschiedene Werte der kovarianten Abschneidlänge λ.

Berücksichtigen wir auch den K_{e3}^0-Zerfall und nehmen an, daß er sich kohärent addiert, so sind die Werte aus Tab. 1 noch mit einem Faktor 4 zu multiplizieren. Damit kommen wir in die Größenordnung des experimentellen Wertes und können mit pseudovektorieller Kopplung etwa 16%, mit pseudoskalarer Kopplung hingegen etwa 5% von diesem bestreiten.

Herrn Professor Walter Thirring bin ich für die Stellung des Themas und zahlreiche Diskussionen zu Dank verpflichtet. Danken möchte ich auch Doz. Dr. K. Baumann für hilfreiche Hinweise.

Anhang

Die Feynman-Integrale $I, I^{\lambda}, I^{\lambda\mu}, I^{\lambda\mu\nu}$ sind komplizierter als die entsprechenden Integrale, die bei Berechnung des anomalen magnetischen Moments auftreten, weil hier die Massen aller drei Nennerfaktoren untereinander und von Null verschieden sind. Ihre Berechnung geschieht nach den von R. P. Feynman [10] angegebenen Methoden. Die Nenner werden mit Hilfe von

$$\frac{1}{a\,b\,c} = 2\int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} \frac{dz_2}{[z_2(c-b)+z_1(b-a)+a]^3} \tag{A 1}$$

und Formeln, die durch partielle Differentiation von (A 1) nach a hervorgehen, zusammengezogen. Die Integration über den Impuls des virtuellen Nukleons wird mit

$$\int d^4p_1 \frac{(1; p_1^{\lambda})}{(p_1^2 - 2\,p_1 K - \Delta)^3} = (1; K^{\lambda})\frac{\pi^2}{2\,i}\frac{1}{K^2+\Delta} \tag{A 2}$$

und mehrfachen Ableitungen von (A 2) nach k^{μ} ausgeführt. Bei uns bedeuten insbesondere:

$$K = p_A z_1 + (p - p_A) z_2$$

$$\Delta = m^2 - z_1(p_A^2 + m^2 - m_K^2) - z_2(p^2 - p_A^2 + m_K^2 - m_{\pi}^2)$$

$$\Delta_L = +(1 - Z_1) L$$

I und I^{λ} sind konvergent; $I^{\lambda\mu}$ und $I^{\lambda\mu\nu}$ sind hingegen logarithmisch divergent. Ihre Berechnung geschieht nach dem Verfahren von Pauli und Bethe [10]. Wir ersetzen $I^{\lambda\mu\nu}$ durch

$$I_P^{\lambda\mu\nu} = \int_0^{\infty} \{I^{\lambda\mu\nu}(m^2) - I^{\lambda\mu\nu}(m^2+\lambda^2)\} G(\lambda)\, d\lambda \tag{A 4}$$

wobei der konvergenzerzeugende Faktor $G(\lambda)$ die Bedingungen:

$$\int_0^{\infty} G(\lambda)\, d\lambda = 1 \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\infty} \lambda^2 G(\lambda)\, d\lambda = 0 \tag{A 5}$$

erfüllen soll. Wir ersetzen also m^2 in $I^{\lambda\mu}$ und $I^{\lambda\mu\nu}$ durch $m^2 + L$ und differenzieren nach L bis das Integral über p_1 konvergiert. Nach Ausführung des p_1 Integrals wird über L integriert um (A 4) zu erhalten. $G(\lambda)$ wird wie eine δ-Funktion für ein bestimmtes λ gewählt. Unter der Annahme $\lambda^2 \gg 1$ können Vernachlässigungen vorgenommen werden. Es verbleiben nun nur mehr Integrale über z_1 und z_2. Ordnen wir diese, so folgen die Aufspaltungen nach Gl. (21) und (26). Für die Koeffizienten J, O, P usw. folgen Ausdrücke der Gestalt

$$\int_0^1 \int_0^{z_1} \frac{dz_1\, dz_2\, P(z_1, z_2)}{e^2 z_2^2 + \alpha z_2 + \beta} \tag{A 6}$$

worin $P(z_1, z_2)$ ein Polynom höchstens dritten Grades in z_1 und z_2 mit Koeffizienten 0 oder $\pm$ 1 ist. Es bedeuten:

$$\begin{aligned} \alpha &= a\, z_1 - b & a &= 2\, p_\Lambda\, e \\ \beta &= m_\Lambda{}^2 z_1{}^2 - c\, z_1 + m^2 & b &= m^2 + m_K{}^2 - m_\Lambda{}^2 - m_\pi{}^2 \\ & & c &= m_\Lambda{}^2 + m^2 - m_K{}^2 \\ & & e &= p - p_\Lambda \end{aligned} \qquad \text{(A 7)}$$

Der Nenner von (A 6) kann im Schwerpunktsystem folgendermaßen umgeformt werden:

$$N = e^2 z_2{}^2 + z^2 + \beta = p^0\, 2\, m_\Lambda\, (z_1 z_2 - z_2{}^2) + (m_\Lambda{}^2 + m^2)\, z_2{}^2 - 2\, m_\Lambda{}^2 z_1 z_2 + \beta\,(z_1)$$

N ist im ganzen Variabilitätsbereich von z_1, z_2 und p^0 stetig und größer als 0. Seine Abhängigkeit von p^0 ist linear. Letzteres kann nur um 1,5% zwischen $p^0{}_{\min} = m = 1836{,}12\, m_e$ und $p^0{}_{\max} = p^{0\prime} = 1863{,}59\, m_e$ (14) variieren. Auch nach Integration über z_2 sieht man, daß der Fehler gering ist, den man begeht, wenn man p^0 durch seinen Mittelwert ersetzt. Die Integration über z_2 in den Ausdrücken (A 6) wird exakt ausgeführt. Die darauffolgende Integration über z_1 hingegen führen wir numerisch mit Hilfe der Simpsonschen Formel mit drei Zwischenpunkten im Intervall 0,1 durch. Der begangene Fehler übersteigt nie 1%. Für die Koeffizienten in Gl. (21) und (26) ergibt sich damit

$$J = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} \frac{dz_2}{N} = 0{,}98 \cdot 10^{-6}\, m_e{}^{-2}$$

$$U = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1 - z_2}{N} = 0{,}26 \cdot 10^{-6}\, m_e{}^{-2}$$

$$V = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2}{N} = 0{,}49 \cdot 10^{-6}\, m_e{}^{-2}$$

$$O = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2{}^2}{N} = 0{,}16 \cdot 10^{-6}\, m_e{}^{-2}$$

$$P = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_2 (z_1 - z_2)}{N} = 0{,}33 \cdot 10^{-7}\, m_e{}^{-2}$$

$$Q = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{(z_1 - z_2)^2}{N} = -\,0{,}21 \cdot 10^{-6}\, m_e{}^{-2} \qquad \text{(A 8)}$$

$$R = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \left(-\frac{1}{2}\right) \ln \frac{\lambda^2 (1 - z_1)}{N} = -\frac{1}{2}\left\{\ln \frac{\lambda}{m} + 0{,}083\right\}$$

$$a_1 + a_2 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{(z_1 - z_2)^2\, z_1}{N} = 0{,}107 \cdot 10^{-6}\, m_e{}^{-2}$$

$$a_2 + a_3 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{(z_1 - z_2)\, z_1 z_2}{N} = 0{,}77 \cdot 10^{-6}\, m_e^{-2}$$

$$a_3 + a_4 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \frac{z_1 z_2^2}{N} = 0{,}21 \cdot 10^{-6}\, m_e^{-2}$$

$$a_5 + a_6 = \int_0^1 dz_1 \int_0^{z_1} dz_2\, z_1 \ln \frac{(1 - z_1)\, \lambda^2}{N} = -\frac{1}{3} \ln \frac{\lambda}{u} + 0{,}362$$

Literatur

1. R. P. Feynman and M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
2. A. Fujii and M. Kawaguchi, Phys. Rev. **113**, 1156 (1959).
3. F. S. Crawford, M. Cresti, M. L. Good, G. R. Kalbfleisch, M. L. Stevenson, H. K. Ticho, Phys. Rev. Lett. **1**, 377 (1958); P. Nordin, J. Orear, L. Reed, A. H. Rosenfeld, F. T. Somlitz, H. D. Taft, R. D. Tripp, Phys. Rev. Lett. **1**, 380 (1958).
4. D. A. Glaser, Strange particle decays. Conf. on High Energy Physics (Kiew, 1959).
5. V. S. Mathur, Nuovo Cim. **14**, 1322 (1959).
6. M. Gell-Mann and A. H. Rosenfeld, Ann. Rev. of Nucl. Sci. **7**, 407 (1957).
7. R. H. Dalitz, Rev. Mod. Phys. **31**, 823 (1959).
8. F. Zachariasen, Phys. Rev. **110**, 1481 (1958).
9. D. Flamm, Nuovo Cim. **16**, 194 (1960).
10. R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 769 (1949); Appendix.

Steady Temperature in a Three-Layered Strip

By

Václav Vodička, Plzeň

(*Received November 6, 1960*)

The general theoretical deductions concerning steady thermal processes in a n-layered doubly infinite strip, [1], will be applied to a three-layer plate. The results are complicated and a considerable part of the following material has not yet been given in the literature.

1. Statement of the Problem

A doubly infinite plate

$$x_0 \leqq x \leqq x_3, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < z < +\infty$$

consists of three homogeneous isotropic layers

$$x_{k-1} \leqq x \leqq x_k, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad -\infty < z < +\infty, \qquad k = 1, 2, 3$$

having the conductivities λ_k, respectively.

We seek the steady temperature distribution in the solid provided that the face $x = x_0$ is kept at the temperature $f(y)$ and the back face $x = x_3$ has always the temperature $g(y)$.

2. General Solution

It has been shown, in [1], that the required solution $u_k(x, y)$ of our problem is determined by the formulae

$$u_k(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [A_k \operatorname{ch}(x - x_{k-1})\eta + B_k \operatorname{sh}(x - x_{k-1})\eta]\, e^{-i\eta y}\, d\eta,$$

$$k = 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

the expressions $A_k = A_k(\eta)$, $B_k = B_k(\eta)$ being given as follows:

$$A_1 = \bar{f}(\eta), \quad B_1 = \frac{1}{N(\eta)} [-\bar{f}(\eta) Z(\eta) + \bar{g}(\eta)]$$

$$\begin{vmatrix} A_{k+1} \\ B_{k+1} \end{vmatrix} = \frac{Q_k(\eta)}{N(\eta)} \left\{ \bar{f}(\eta) \begin{vmatrix} N(\eta) \\ -Z(\eta) \end{vmatrix} + \bar{g}(\eta) \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}, \qquad k = 1, 2$$

$$Z(\eta) = \operatorname{ch}(l_1 + l_2 + l_3)\eta + (\Lambda_1 - 1)\operatorname{sh} l_1\eta \operatorname{sh}(l_2 + l_3)\eta +$$
$$+ (\Lambda_2 - 1)\operatorname{sh}(l_1 + l_2)\eta \operatorname{sh} l_3\eta + (\Lambda_1 - 1)(\Lambda_2 - 1)\operatorname{sh} l_1\eta \operatorname{ch} l_2\eta \operatorname{sh} l_3\eta$$
$$N(\eta) = \operatorname{sh}(l_1 + l_2 + l_3)\eta + (\Lambda_1 - 1)\operatorname{ch} l_1\eta \operatorname{sh}(l_2 + l_3)\eta +$$
$$+ (\Lambda_2 - 1)\operatorname{ch}(l_1 + l_2)\eta \operatorname{sh} l_3\eta + (\Lambda_1 - 1)(\Lambda_2 - 1)\operatorname{ch} l_1\eta \operatorname{ch} l_2\eta \operatorname{sh} l_3\eta$$
$$Q_1(\eta) = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch} l_1\eta, & \operatorname{sh} l_1\eta \\ \Lambda_1 \operatorname{sh} l_1\eta, & \Lambda_1 \operatorname{ch} l_1\eta \end{Vmatrix},$$
$$Q_2(\eta) = \begin{Vmatrix} \operatorname{ch} l_2\eta, & \operatorname{sh} l_2\eta \\ \Lambda_2 \operatorname{sh} l_2\eta, & \Lambda_2 \operatorname{ch} l_2\eta \end{Vmatrix} Q_1(\eta)$$
$$\eta_k = x_k - x_{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \qquad \Lambda_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}, \qquad k = 1, 2$$
$$\begin{matrix} \bar{f}(\eta) \\ \bar{g}(\eta) \end{matrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{matrix} f(y) \\ g(y) \end{matrix} e^{i\eta y}\, dy. \tag{2.2}$$

Using this, toilsome calculations give us the above solution (2.1) in the form

$$u_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\eta y}}{N(\eta)} \{\bar{f}(\eta)\,[\operatorname{sh}(x_3 - x)\eta +$$
$$+ (\Lambda_1 - 1)\operatorname{sh}(l_2 + l_3)\eta \operatorname{ch}(x_1 - x)\eta + (\Lambda_2 - 1)\operatorname{sh} l_3\eta \operatorname{ch}(x_2 - x)\eta +$$
$$+ (\Lambda_1 - 1)(\Lambda_2 - 1)\operatorname{ch} l_2\eta \operatorname{sh} l_3\eta \operatorname{ch}(x_1 - x)\eta] +$$
$$+ \bar{g}(\eta) \operatorname{sh}(x - x_0)\eta\}\, d\eta, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1$$
$$u_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\eta y}}{N(\eta)} \{\Lambda_1 \bar{f}(\eta)\,[\operatorname{sh}(x_3 - x)\eta +$$
$$+ (\Lambda_2 - 1)\operatorname{sh} l_3\eta \operatorname{ch}(x_2 - x)\eta] + \bar{g}(\eta)\,[\operatorname{sh}(x - x_0)\eta +$$
$$+ (\Lambda_1 - 1)\operatorname{ch} l_1\eta \operatorname{sh}(x - x_1)\eta]\}\, d\eta, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2$$
$$u_3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\eta y}}{N(\eta)} \{\Lambda_1\Lambda_2 \bar{f}(\eta) \operatorname{sh}(x_3 - x)\eta +$$
$$+ \bar{g}(\eta)\,[\operatorname{sh}(x - x_0)\eta + (\Lambda_1 - 1)\operatorname{ch} l_1\eta \operatorname{sh}(x - x_1)\eta +$$
$$+ (\Lambda_2 - 1)\operatorname{ch}(l_1 + l_2)\eta \operatorname{sh}(x - x_2)\eta +$$
$$+ (\Lambda_1 - 1)(\Lambda_2 - 1)\operatorname{ch} l_1\eta \operatorname{ch} l_2\eta \operatorname{sh}(x - x_2)\eta]\}\, d\eta, \qquad x_2 \leqslant x \leqslant x_3. \tag{2.3}$$

The indicated integrations are hopelessly complicated and it is impossible, in general, to give a kind of closed form for our solution (2.3). This can be done only in a few degenerate cases the mention of which is to be made in the following sections.

3. A Homogeneous Plate. A Special Two-Layered Strip

3.1. The simplest problem of a homogeneous strip will be obtained for $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1$. In this case the general formulae (2.3) change into the well-known results given in the literature — see, for instance, ref. [1].

3.2. The nearest case of a two-layered plate is in general too complicated and cannot be solved by a closed formula. Only under quite special conditions $\Lambda_2 = 1$, $l_1 = l_2 + l_3$ or $\Lambda_1 = 1$, $l_1 + l_2 = l_3$ the above solution (2.3) leads, with some manipulation, to closed formulae giving the steady temperature fields in the belonging two-layer strips. This situation, too, has been examined in detail in ref. [1].

4. A Particular Three-Layered Plate

We shall now treat a rather artificial problem characterised by $\Lambda_1 = \Lambda_2$, $l_2 = 2\,l_1$, $l_3 = l_1$. This is probably the only case in the theory of three-layered strips where the solution can be expressed by a kind of closed formulae.

Writing simply Λ and l instead of Λ_1 and l_1, one finds from (2.2) at once

$$N(\eta) = \frac{1}{4}(\Lambda+1)^2 \operatorname{sh} 4\,l\,\eta. \tag{4.1}$$

Using this, our solution (2.3) appears in the form

$$\left.\begin{aligned}
u_1(x,y) &= \frac{4}{(\Lambda+1)^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\eta y}}{\operatorname{sh} 4\,l\,\eta} \{\bar{f}(\eta)\,[\Lambda \operatorname{sh}(x_3 - x)\,\eta + \\
&\quad + (\Lambda-1)\operatorname{ch} 2\,l\,\eta \operatorname{sh}(x - x_0)\,\eta + \\
&\quad + (\Lambda-1)^2 \operatorname{sh} l\,\eta \operatorname{ch} 2\,l\,\eta \operatorname{ch}(x_1 - x)\,\eta] + \bar{g}(\eta) \operatorname{sh}(x - x_0)\,\eta\}\,d\eta, \\
&\qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1 \\
u_2(x,y) &= \frac{2}{(\Lambda+1)^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\eta y}}{\operatorname{sh} 4\,l\,\eta} \{\Lambda\,\bar{f}(\eta)\,[(\Lambda+1)\operatorname{sh}(x_3 - x)\,\eta - \\
&\quad - (\Lambda-1)\operatorname{sh}(2\,l + x_0 - x)\,\eta] + \bar{g}(\eta)\,[(\Lambda+1)\operatorname{sh}(x - x_0)\,\eta - \\
&\quad - (\Lambda-1)\operatorname{sh}(2\,l + x_0 - x)\,\eta]\}\,d\eta, \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\
u_3(x,y) &= \frac{4}{(\Lambda+1)^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\eta y}}{\operatorname{sh} 4\,l\,\eta} \{\Lambda^2\,\bar{f}(\eta) \operatorname{sh}(x_3 - x)\,\eta + \\
&\quad + \bar{g}(\eta)\,[\Lambda \operatorname{sh}(x - x_0)\,\eta - (\Lambda-1)\operatorname{ch} 2\,l\,\eta \operatorname{sh}(x_3 - x)\,\eta + \\
&\quad + (\Lambda-1)^2 \operatorname{ch} l\,\eta \operatorname{ch} 2\,l\,\eta \operatorname{sh}(x - x_2)\,\eta]\}\,d\eta, \qquad x_2 \leqslant x \leqslant x_3.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Further simplification of these results comes from applying the well-known formulae — see ref. [1] —

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(\eta) \frac{\operatorname{sh} \alpha \eta}{\operatorname{sh} \beta \eta} e^{-i\eta y} d\eta = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi \alpha}{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(\varrho)\, d\varrho}{\operatorname{ch} \frac{\pi(\varrho - y)}{\beta} + \cos \frac{\pi \alpha}{\beta}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{h}(\eta) \frac{\operatorname{ch} \alpha \eta}{\operatorname{ch} \beta \eta} e^{-i\eta y} d\eta = \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \cos \frac{\pi \alpha}{2\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varrho) \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi(\varrho - y)}{2\beta}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(\varrho - y)}{\beta} + \cos \frac{\pi \alpha}{\beta}} d\varrho,$$

$$|\alpha| < \beta;$$

$\bar{h}(\eta)$ means the FOURIER transform of $h(y)$, as defined in the last relation (2.2).

Using this and performing some elementary operations, the solution (4.2) appears in its final form

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2l(\Lambda + 1)^2} \sin \frac{\pi (x - x_0)}{4l} \times$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varrho) \left[\frac{\Lambda}{\operatorname{ch} \frac{\pi(\varrho - y)}{4l} - \cos \frac{\pi(x - x_0)}{4l}} + \right.\right.$$

$$2(\Lambda - 1) \frac{\cos \frac{\pi(x - x_0)}{4l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(\varrho - y)}{2l} + \cos \frac{\pi(x - x_0)}{2l}} +$$

$$\left. 4(\Lambda - 1)^2 \frac{\cos \frac{\pi(x - x_0)}{4l} \operatorname{ch} \frac{\pi(\varrho - y)}{2l}}{\operatorname{ch} \frac{\pi(\varrho - y)}{l} - \cos \frac{\pi(x - x_0)}{l}} \right] d\varrho +$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\varrho)\, d\varrho}{\operatorname{ch} \frac{\pi(\varrho - y)}{4l} + \cos \frac{\pi(x - x_0)}{4l}} \right\}, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + l$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{4l(\Lambda + 1)^2} \left\{ \Lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varrho) \left[(\Lambda + 1) \times \right.\right.$$

$$\times \frac{\sin\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(\varrho-y)}{4l}-\cos\frac{\pi(x-x_0)}{4l}} - \frac{(\Lambda-1)\cos\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(\varrho-y)}{4l}+\sin\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}\Bigg] d\varrho + \Bigg\}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\varrho)\left[\frac{(\Lambda+1)\sin\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(\varrho-y)}{4l}+\cos\frac{\pi(x-x_0)}{4l}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\Lambda-1)\cos\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(\varrho-y)}{4l}+\sin\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}\right] d\varrho\Bigg\}, \qquad x_0+l\leqslant x\leqslant x_0+3l$$

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2l(\Lambda+1)^2}\sin\frac{\pi(x-x_0)}{4l}\times$$

$$\times\Bigg\{\Lambda^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\varrho)\,d\varrho}{\operatorname{ch}\frac{\pi(\varrho-y)}{4l}-\cos\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}+\int_{-\infty}^{+\infty} g(\varrho)\times$$

$$\times\left[\frac{\Lambda}{\operatorname{ch}\frac{\pi(\varrho-y)}{4l}+\cos\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}+\frac{2(\Lambda-1)\cos\frac{\pi(x-x_0)}{4l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(\varrho-y)}{2l}+\cos\frac{\pi(x-x_0)}{2l}}-\right.$$

$$\left.-\frac{4(\Lambda-1)^2\cos\frac{\pi(x-x_0)}{4l}\cos\frac{\pi(x-x_0)}{2l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi(\varrho-y)}{l}-\cos\frac{\pi(x-x_0)}{l}}\right] d\varrho\Bigg\},$$

$$x_0+3l\leqslant x\leqslant x_0+4l. \tag{4.3}$$

Apart from that the practical value of these results is considerably diminished by a rather artificial inner structure of the problem, our formulae (4.3) are yet of theoretical significance. Firstly, one has here new facts from the theory of three-layered plates and secondly, our deductions may serve as a kind of guide in treating other advanced questions on thermal and mechanical processes in composite continua.

Reference

1. V. Vodička, Steady Temperature Field in a Composite Doubly Infinite Strip' Jour. Phys. Soc. Jap. (Tokyo) **15**, 1332 (1960).

Zur Theorie der Vielfachstreuung

Von

Roman Sexl

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

Mit 1 Abbildung

(*Eingegangen am 11. November 1960*)

Zusammenfassung

Die Streuung einer Welle an einer eindimensionalen Reihe von äquidistanten δ-Funktionen wird exakt berechnet und das Resultat mit der Theorie der Vielfachstreuung von M. LAX verglichen. Diese Theorie erweist sich als unexakt. Es wird daher für den Brechungsindex eines Mediums aus beliebig angeordneten, punktförmigen isotropen Streuern die Gleichung $(k')^2 = k^2 + 4\pi n c f(k, k)$ vorgeschlagen.

Wir betrachten die Streuung einer SCHRÖDINGER Welle an einer eindimensionalen Reihe von unendlich vielen δ-Funktionen im Abstand 1. (Dieses Modell ist der einfachste Fall eines Kronig Penney Kristalles.) Den Potentialverlauf zeigt Abb. 1.

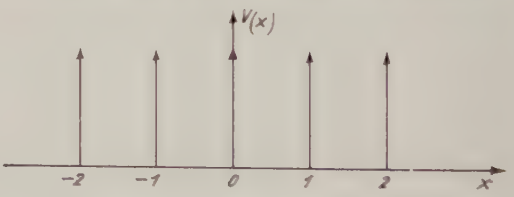

Abb. 1

Die SCHRÖDINGER-Gleichung unseres Problems ist daher ($2m = \hbar = 1$)

$$-\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)\,\Psi(x) = k^2\,\Psi(x) \tag{1}$$

Für $\Psi(x)$ machen wir den Ansatz

$$\Psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik'n}\, e^{ik|x-n|} \tag{2}$$

In diesem Ansatz ist bereits das BLOCHsche Theorem enthalten. Es sagt aus, daß sich die Wellenfunktion beim Fortschreiten von einem Gitterpunkt zum nächsten nur mit einem vom Gitterpunkt unabhängigen Phasenfaktor $\exp(i\,k')$ multipliziert.

Durch zweimaliges Differentiieren erhalten wir

$$\Psi'' = 2\,i\,k \sum_n e^{i k' n}\,\delta(x-n) - k^2\,\Psi(x)$$

Es muß daher gelten

$$\sum_n \sum_{n'} \delta(x-n')\,e^{i k' n}\,e^{i k|n-n'|} = 2\,i\,k \sum_{n'} e^{i k' n'}\,\delta(x-n') \tag{3}$$

Koeffizientenvergleich der δ-Funktionen, z. B. für $n' = 0$ ergibt (für andere n' erhält man selbstverständlich das gleiche Endergebnis)

$$\sum_n e^{i k' n}\,e^{i k|n|} = 2\,i\,k \tag{4}$$

Führt man die Summe aus, so erhält man als Gleichung für k'

$$\cos k' = \cos k + \frac{1}{2\,k}\sin k \tag{5}$$

Daraus kann man sich die Größe k'/k, den Brechungsindex des aus den δ-Funktionen gebildeten Kristalles, berechnen.

Wir wollen nun versuchen, das gleiche Resultat nach der Methode der Theorie der Vielfachstreuung zu erhalten. Dazu müssen wir zuerst die Streuung an einer einzelnen δ-Funktion berechnen. Die Schrödinger-Gleichung lautet

$$-\Psi'' + \delta(x)\,\Psi(x) = k^2\,\Psi(x) \tag{6}$$

Ihre Lösung ist, wie man leicht sieht

$$\Psi(x) = e^{i k x} + \frac{e^{i k|x|}}{2\,i\,k-1} \equiv e^{i k x} + f(k_1, k)\,e^{i k_1 x} \tag{7}$$

Dabei ist $k_1 = \pm k$ für $x \gtrless 0$ und $f(k_1, k)$ die Streuamplitude

$$f(k, k) = \frac{1}{2\,i\,k-1} = f(-k, k) \tag{8}$$

Wenn wir die Differentialgleichung (6) in eine Integralgleichung umformen erhalten wir (statt $\delta(x)$ wollen wir ein beliebiges Potential $U(x)$ annehmen)

$$\Psi(x) = e^{i k x} + \frac{1}{2\,i\,k}\,e^{i k|x|} \int e^{-i k_1 x'}\,U(x')\,\Psi(x')\,dx' \tag{9}$$

wo k_1 die gleiche Bedeutung wie vorher hat.

Es gilt daher

$$f(k_1, k) = \frac{1}{2\,i\,k}\,(e^{i k_1 x},\, U(x)\,\Psi(x)) \tag{10}$$

Wir definieren jetzt einen Operator $T(0)$ durch

$$T(0)\,e^{i k x} = U(x)\,\Psi(x) \tag{11}$$

Damit wird

$$f(k_1, k) = \frac{1}{2\,i\,k}\,T_{k_1, k}(0) \tag{12}$$

(Das Argument 0 in $T(0)$ deutet dabei nur an, daß sich der Streuer in $x = 0$ befindet.)

Die grundlegenden Arbeiten über Vielfachstreuung in inhomogenen Medien und für geordnete Streuer sind M. Lax, Rev. Mod. Phys. **23** 287 (1951) und Phys. Rev. **85**, 621 (1952), im folgenden als I und II bezeichnet. Wir gehen von der Gleichung (II-3,17) aus

$$H(k') = E - n\,c\,T_{k',k'} \tag{13}$$

Dabei ist $H(k') = (k')^2$, $E = k^2$, n, die Dichte der Streuer, haben wir gleich 1 gesetzt. c ist ein Korrektionsfaktor der weiter unten bestimmt wird. Die Gleichung (13) nimmt also folgende Gestalt an

$$(k')^2 = k^2 - \frac{2\,i\,k'\,c}{2\,i\,k' - 1} \tag{14}$$

c gibt das Verhältnis des effektiven zum makroskopischen Feld im Ursprung an

$$c = \Psi_e(0)/\langle\Psi(0)\rangle \tag{15}$$

Das effektive Feld entsteht aus dem totalen Feld

$$\Psi(x) = c_1 \sum e^{ik'n}\, e^{ik|x-n|} \tag{2}$$

durch Weglassen des Streuers in $x = 0$, also

$$\Psi_e(x) = c_1 \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{ik'n}\, e^{ik|x-n|} - \sum_{n=1}^{\infty} e^{ik'n}\, e^{ik|x-n|} \right\} \tag{16}$$

Es stellt daher das Feld dar, das auf den Streuer in $x = 0$ einfällt. Zur Berechnung des makroskopischen Feldes stellen wir Ψ in der Form dar

$$\Psi(x) = e^{ik'x} \cdot c_1 \sum e^{ik'(n-x)}\, e^{ik|x-n|} \equiv e^{ik'x} f(x) \tag{2 a}$$

$f(x)$ ist eine Funktion mit der Periode 1, $f(x-1) = f(x)$. Diese Periode entspricht dem Atomabstand. Um daher zum beobachtbaren Feld $\langle\Psi(x)\rangle$ (makroskopisches Feld) zu gelangen, müssen wir $f(x)$ durch seinen Mittelwert ersetzen. Die Konstante c_1 ist nun so zu bestimmen, daß $\langle\Psi(x)\rangle = e^{ik'x}$, oder $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

$$1 = \int_0^1 f(x)\,dx = c_1 \int_0^1 \sum e^{ik'(n-x)}\, e^{ik|n-x|}\,dx =$$

$$= c_1 \int_0^1 e^{i(k-k')x}\,dx \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(k-k')n} + c_1 \int_0^1 e^{-i(k+k')x}\,dx \sum_{n=1}^{\infty} e^{i(k+k')x} =$$

$$= -c_1 \left\{ \frac{1}{i(k-k')} + \frac{1}{i(k+k')} \right\} = 1$$

$$c_1 = i\,\frac{k'^2 - k^2}{2\,k} \tag{17}$$

Wir können nun c berechnen

$$c = \Psi_e(0)/\langle\Psi(0)\rangle = \Psi_e(0) = i\frac{k'^2 - k^2}{2k}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\left\{e^{i(k-k')n} + e^{i(k+k')n}\right\}$$

$$c = i\frac{k'^2 - k^2}{2k}\frac{\cos k' - e^{ik}}{\cos k - \cos k'} \tag{18}$$

und in die Gleichung (14) einsetzen. Dabei zeigt es sich sofort, daß man nicht zum Resultat (5) kommt. Das richtige Ergebnis erhält man nur, wenn man c in

$$k'^2 = k^2 - \frac{2ikc}{2ik - 1} \tag{14 a}$$

einsetzt:

$$1 = \frac{e^{ik} - \cos k'}{(2ik - 1)(\cos k' - \cos k)}$$

$$2ik\cos k' - 2ik\cos k = e^{ik} - \cos k = i\sin k$$

$$\cos k' = \cos k + \frac{1}{2k}\sin k \tag{5}$$

Es zeigt sich also, daß die Gleichung (II-3,17) auch bei korrekter Berechnung des Faktors c nicht exakt gilt, im Gegensatz zu einer Behauptung von Lax in II. Der Fehler liegt in folgender Umrechnung

$$(e^{ibx}, T(0)\,\Psi_e(x)) = \frac{\Psi_e(0)}{\langle\Psi(0)\rangle}\cdot(e^{ibx}, T(0)\,\langle\Psi\rangle) = c\,T_{bk'} \tag{19}$$

Lax begründet das damit, daß $(e^{ibx}, T\,\Psi_e(x))$ für punktförmige isotrope Streuer nur vom Wert von Ψ_e im Nullpunkt abhängt. Da aber T ein Operator ist, wird das Matrixelement nicht nur vom Wert von $\Psi_e(x)$ im Nullpunkt, sondern auch von allen Ableitungen von Ψ_e im Ursprung abhängen. Dagegen ist es für punktförmige isotrope Streuer gleichgültig wie groß b in $\exp(i\,b\,x)$ ist.

Wir müssen daher das Verhalten von Ψ_e im Ursprung näher untersuchen. Ψ_e hat dort keinesfalls die Gestalt $\exp(i\,k'\,x)$, diese Periodizität ist ja gerade dort am meisten gestört, sondern besteht aus zwei Wellen $\exp(i\,k\,x)$ und $\exp(-i\,k\,x)$

$$\Psi_e(x) = a\,e^{ikx} + b\,e^{-ikx} \tag{20}$$

Wenn die Streuung isotrop ist, gilt

$$T(0)\,e^{ikx} = T(0)\,e^{-ikx}$$

und daher

$$(e^{ikx}, T(0)\,(a\,e^{ikx} + b\,e^{-ikx})) = \Psi_e(0)\,T_{k,k} = c\,T_{k,k} \tag{21}$$

Im Dreidimensionalen sind diese Argumente nicht mehr exakt, da die aus allen Richtungen gegen den Ursprung hinlaufenden Kugelwellen

noch eine andere als exponentielle Abhängigkeit von r haben. Es wird aber auch hier

$$(k')^2 = k^2 + 4\pi n c f(k, k) \tag{22}$$

eine bessere Näherung sein.

Herrn Prof. Dr. W. Thirring danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit.

Zur Röntgenkleinwinkelstreuung verdünnter kolloider Systeme. Die Berechnung der Streukurven von Parallelepipeden.

Von

P. Mittelbach und **G. Porod***

Aus dem Institut für physikalische Chemie der Universität Graz

Mit 13 Abbildungen

(*Eingegangen am 12. November 1960*)

Unter Zugrundelegung der Interferenzmethode wird eine Formel für die Streuung von Prismen abgeleitet. Zur praktischen Anwendung sind allgemein — wie auch im vorliegenden Fall der Parallelepide — zwei Integrale auszuwerten, was mit Hilfe der Simpsonschen Formel numerisch vorgenommen wurde. Als eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Untersuchung stellte sich heraus, daß im Bereich schwacher Anisometrie ein charakteristischer Übergang im Streuverhalten stattfindet, welcher unter derselben Voraussetzung auch bei den Zylindern gefunden werden kann.

I. Einleitung und Problemstellung

Nach dem heutigen Stand der Theorie der Röntgenkleinwinkelstreuung sind es vor allem die homodispersen verdünnten Systeme, bei welchen diese Untersuchungsmethode besonders erfolgreich angewendet werden kann. In diesem Falle erlaubt es das Röntgenkleinwinkeldiagramm, in verhältnismäßig einfacher Weise auf die Größe der Teilchen Rückschlüsse zu ziehen [1]. Von weit größerer Schwierigkeit erweist sich indessen die Aufgabe, aus der Streukurve die Teilchenform zu bestimmen. Abgesehen von einer groben Charakterisierung durch das Verhältnis des Volumens zum Streumassenradius gibt es hierfür keinen anderen Weg als den, die experimentell gefundene Kurve mit theoretisch berechneten Streukurven verschiedener Körper zu vergleichen.

Berechnungen von Streukurven wurden bereits von verschiedenen Autoren durchgeführt [2 bis 13]. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Streuung von Parallelepipeden. Zur Berechnungsmethode selbst verdient folgender Gesichtspunkt hervorgehoben zu werden: Die bisherigen Erfahrungen haben gezeigt, daß sich geringe Änderungen der Form nur bei relativ großen Ablenkungswinkeln auswirken. Eine wirkungsvolle Formbestimmung muß sich daher auf den Außenteil der

* Jetzt im Physikalischen Institut der Universität Graz.

Streukurve gründen. Dies ist möglich geworden, seitdem der in Frage kommende Streuwinkelbereich infolge der ständigen Verbesserungen der Meßtechnik auch experimentell erfaßt werden kann. Zur Berechnung der Streuung verschiedener regelmäßiger Körper verwendeten wir bisher eine Potenzreihenentwicklung, welche verhältnismäßig schnell zum Ziele führt, solange man sich auf den Innenteil der Streukurve beschränkt. Für größere Werte des Streuarguments jedoch wird der Rechenaufwand insbesondere wegen des starken Anwachsens der Reihenglieder selbst bei Inanspruchnahme einer elektronischen Rechenmaschine überaus groß. Die im folgenden noch genau darzulegende Methode wird, aufgebaut auf einer ganz anderen Grundlage, gerade dem Gesichtspunkt des elektronischen Rechnens besser gerecht. Sie gestattet es für die wichtigsten prismatischen Körper, die Rechnung mit einem routinemäßig erstellbaren Programm prinzipiell für jeden vernünftigerweise in Betracht kommenden Streubereich durchzuführen.

2. Theorie

Der Berechnung wurden wie bei den bisherigen Arbeiten folgende Voraussetzungen zugrunde gelegt:

1. Das kolloide System, homodispers und genügend verdünnt, bestehe aus zwei Phasen mit verschiedener und innerhalb jeder Phase konstanter Elektronendichte.

2. Es wird nur die kohärente Streuung berücksichtigt ohne Absorption und Mehrfachstreuung.

3. Die Berechnung der Streuintensität erfolgt auf Grund der Strahlenoptik, und zwar in Frauenhoferscher Näherung.

Nimmt man weiters an, daß der Unterschied in den Brechungsindizes der beiden Medien klein ist und daß keine metallische Phase vorliegt, so lassen sich die abzuleitenden Formeln auch ohne Bedenken auf die Lichtstreuung anwenden.

Um zur Streuung eines Systems von Teilchen, welches der ersten der obigen Voraussetzung genügt, zu gelangen, hat man prinzipiell zwei Wege zur Verfügung: Der erste besteht darin, daß man die Amplitude eines Teilchens in bestimmter Lage berechnet und anschließend die Intensität über alle möglichen Lagen mittelt. Beim zweiten bedient man sich der verallgemeinerten Debyeschen Formel der Gasinterferenzen, deren Anwendung an die Kenntnis der Abstandsstatistik bzw. in einer äquivalenten Darstellung der $2n$-ten Momente der intrapartikulären Abstände geknüpft ist. Wir wollen in dieser Arbeit den erstgenannten Weg einschlagen.

Bezeichnet $\mathfrak{f}_0$ die Richtung des einfallenden Strahls und $\mathfrak{f}$ die des abgebeugten, so liefert ein streufähiger Punkt mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ von einem beliebigen Bezugspunkt aus eine Streuamplitude

$$\mathfrak{A} = e^{i(2\pi/\lambda)(\mathfrak{f}-\mathfrak{f}_0,\mathfrak{r})} = e^{isr\cos\beta}, \qquad \text{wobei mit} \qquad s = \frac{4\pi}{\lambda}\sin\vartheta \qquad (1)$$

ϑ den halben Abbeugungswinkel und β den Winkel zwischen r und der Strahlensymmetrale bedeutet. Betrachten wir nun ein Prisma beliebiger Basis Q und der Länge H. Seine Lage sei bestimmt durch den Winkel α zwischen der Prismenachse und der Strahlensymmetrale n und durch den Winkel φ, den die Projektion von n auf die Basis (n') mit einer körperfesten Richtung in dieser einschließt (Abb. 1). Weiters greifen wir irgendeinen Querschnitt im Abstand z vom Mittelpunkt O (Bezugspunkt) der Prismenachse heraus und denken uns diesen senkrecht zu n' in winzige Flächenstreifen zerschnitten. Der Abstand eines solchen vom Durchstoßpunkt der Prismenachse durch den Querschnitt sei y, seine Größe eine Funktion dieses Abstandes und des Winkels φ: $L_\varphi(y)\,dy$. Da die Projektion der Ortsvektoren für alle Punkte eines solchen Streifens der Dicke dz gleich ist, nämlich $z\cos\alpha + y\sin\alpha$, liefert er nach (1) einen Beitrag zur Gesamtamplitude der Größe

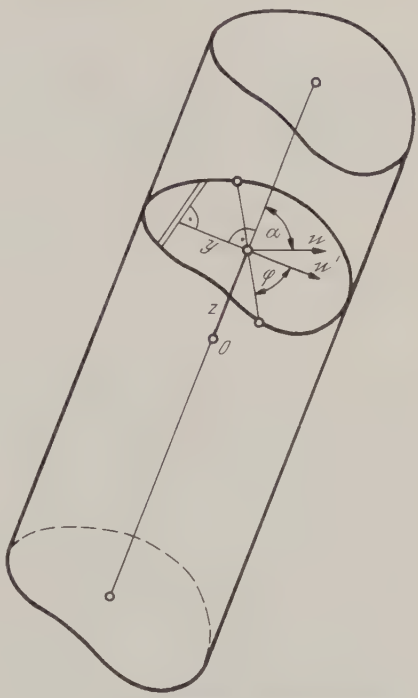

Abb. 1. Zur Berechnung der Streufunktion eines zylindrischen Körpers

$$d\mathfrak{A} \sim e^{is\,x\cos\alpha}\cdot e^{is\,y\sin\alpha}\,L_\varphi(y)\,dy\,dx \tag{2}$$

Die Summierung aller Beiträge kann nun unabhängig voneinander nach Querschnitt und Länge vorgenommen werden. Zuvor empfiehlt sich noch die Einführung zweier Bezugslängen, das heißt wir setzen $z = H\,\xi$ und $y = D\,\eta$, wobei D irgendeine Querschnittsgröße darstellt. Mit der von der Größe von D unabhängigen Funktion $l_\varphi(\eta) = L_\varphi(y)/D$ erhält man nach Division durch $V = Q\,H$ (Normierung auf 1 für $\vartheta = 0$)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_L\,(s\,H\cos\alpha)\cdot\mathfrak{A}_Q\,(s\,D\sin\alpha,\varphi) \tag{3}$$

mit

$$\mathfrak{A}_L\,(s\,H\cos\alpha) = \int_{-1/2}^{+1/2} e^{i\,s\,H\cos\alpha\,\cdot\,\xi}\,d\xi = \frac{\sin\,(s\,H/2\cdot\cos\alpha)}{s\,H/2\cdot\cos\alpha} \tag{4}$$

und

$$\mathfrak{A}_Q(s\,D\sin\alpha,\varphi)=\frac{D^2}{Q}\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} e^{isD\sin\alpha\cdot\eta}\,l_\varphi(\eta)\,d\eta \tag{5}$$

Die Integrationsgrenzen in (5) entsprechen den Extremabständen der Flächenstreifen von der Prismenachse. Multiplikation von (3) mit dem konjugiert komplexen Wert ergibt die einer bestimmten Lage (φ, α) zugeordnete Streuintensität. Wir mitteln nun über den Winkel φ mit dem Ergebnis

$$\phi(s\,D,H,\alpha)=\left[\frac{\sin(s\,H/2\cdot\cos\alpha)}{s\,H/2\cdot\cos\alpha}\right]^2\phi_Q(s\,D\sin\alpha) \tag{6}$$

mit

$$\phi_Q(s\,D\sin\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{A}_Q(s\,D\sin\alpha,\varphi)\,\mathfrak{A}_Q^*(s\,D\sin\alpha,\varphi)\,d\varphi \tag{7}$$

Für $\alpha=\pi/2$ ist durch (7) die Streuung einer Fläche in der Strahlensymmetrale gegeben, gemittelt über alle Azimutalen φ. Sie sei als Querschnittsfunktion $\phi_Q(s\,D)$ bezeichnet. Der analoge Ausdruck derselben im Winkel β zur Strahlensymmetrale geneigten Fläche ist somit einfach $\phi_Q(s\,D\cos\beta)$, genau so groß wie die Querschnittsfunktion der um den Faktor $\cos\beta$ ähnlich verkleinerten Fläche.

Da die Lagenmannigfaltigkeit der Prismenachsen, welche mit der Strahlensymmetrale einen Winkel zwischen α und $\alpha-d\alpha$ einschließen, proportional ist $\sin\alpha\,d\alpha$, läßt sich die gesuchte Streufunktion des Prismas schließlich in der Form darstellen:

$$\phi(s\,D,H)=\int_0^{\pi/2}\phi_Q(s\,D\sin\alpha)\cdot\left[\frac{\sin(s\,H/2\cdot\cos\alpha)}{s\,H/2\cdot\cos\alpha}\right]^2\sin\alpha\,d\alpha \tag{8}$$

bzw. mit $\cos\alpha=\sigma$

$$\phi(s\,D,H)=\int_0^1\phi_Q(s\,D\sqrt{1-\sigma^2})\cdot\left[\frac{\sin(s\,H\,\sigma/2)}{s\,H\,\sigma/2}\right]^2 d\sigma \tag{8a}$$

Mit Hilfe von (8) ist die Streufunktion eines Prismas auf die Querschnittsfunktion zurückgeführt. Um zu dieser zu gelangen, ist es im allgemeinen einfacher, die Amplitude des Querschnitts in bestimmter Lage statt nach (5) durch eine direkte Doppelintegration zu berechnen allgemein etwa in der Form

$$\mathfrak{A}_Q(s,\varphi)=1/Q\int_Q e^{is(\mathfrak{r},\mathfrak{n})}\,df, \tag{9}$$

wobei mit Q sowohl die Größe der Fläche als auch der Integrationsbereich bezeichnet ist. Für den Kreis liegen die Verhältnisse besonders

einfach, weil die Amplitude von φ unabhängig ist. Ausführung von (9) und Quadrierung liefert

$$\phi_{Q,\,\text{Kreis}} = [2/s\,r \cdot I_1(s\,r)]^2 \qquad (I_1 \text{ Besselfunktion erster Ordnung}) \qquad (10)$$

In (8) eingesetzt ist dies die bekannte Formel von FOURNET [14] für die Streuung von Kreiszylindern, die er schon 1951 durch eine der unseren ganz analoge Betrachtung ableitete. Im Falle rechteckigen (und ebenso elliptischen) Querschnitts erhält man für ϕ_Q eine kompliziertere Darstellung. Sind A und B die Seiten des Rechtecks mit $A \leqslant B$ und φ der Winkel, den die Seite B mit π einschließt, so ergibt sich nach (9) die Querschnittsamplitude zu

$$\mathfrak{A}_{Q,\,\text{Rechteck}} = 1/A\,B \int_{-A/2}^{+A/2} \int_{-B/2}^{+B/2} e^{i\,s\,(x \sin\varphi + y \cos\varphi)}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{\sin\,(s\,A/2 \cdot \sin\varphi) \cdot \sin\,(s\,B/2 \cdot \cos\varphi)}{s\,A/2 \cdot \sin\varphi\; s\,B/2 \cdot \cos\varphi},$$

ein Produkt aus den Formfaktoren der Seitenprojektionen auf die Strahlensymmetrale. Die Querschnittsfunktion wird somit

$$\phi_{Q,\,\text{Rechteck}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin\,(s\,A/2 \sin\varphi)\,\sin\,(s\,B/2 \cdot \cos\varphi)}{s\,A/2 \cdot \sin\varphi\; s\,B/2 \cdot \cos\varphi}\right]^2 d\varphi \qquad (12)$$

Zur Berechnung der Gesamtamplitude des Parallelepipeds in bestimmter Lage kann man ganz analog vorgehen wie bei (11) und bekommt demnach ein Produkt der Formfaktoren der drei Kantenprojektionen (auf π). Dieses Ergebnisses bediente sich der eine von uns schon in einer früheren Arbeit [15].

Die Formeln (8) und (12) setzen uns instand, die Streuung von Parallelepipeden beliebiger Kantenverhältnisse zu berechnen.

III. Durchführung der Rechnung

Für unseren Spezialfall der Parallelepipede wollen wir die Formeln (8) und (12) etwas anders schreiben. Zu diesem Zweck wählen wir als einzige Bezugslänge die mittlere Kante B und setzen $s\,B = \mu$. Das Verhältnis der kleinsten Kante A (Dicke) und größten C (Länge) zu dieser mittleren Kante B sei a bzw. c. Das Parallelepiped wird somit immer in der Form $a : 1 : c$ angegeben. Setzt man außerdem aus rein praktischen Gründen in (12) $\varphi = \pi/2 \cdot u$, so erhalten wir als Ausgangspunkt für die numerische Durchführung der Rechnung

$$\phi_Q(\mu, a) = \int_0^1 \left[\frac{\sin\,(\mu/2 \cdot \cos\,(\pi/2 \cdot u)) \cdot \sin\,(\mu\,a/2 \cdot \sin\,(\pi/2 \cdot u))}{\mu/2 \cdot \cos\,(\pi/2 \cdot u)\;\mu\,a/2 \cdot \sin\,(\pi/2 \cdot u)^2}\right]^2 du \qquad (13)$$

und

$$\phi(\mu, a, c) = \int_0^1 \phi_Q(\mu \sqrt{1-\sigma^2}, a) \left[\frac{\sin(\mu c \sigma/2)}{\mu c \sigma/2} \right]^2 d\sigma. \tag{14}$$

Im Detail ging die Rechnung so vor sich, daß zunächst nach (13) eine Tabelle von 250 ϕ_Q-Werten in gleichen Argumentsabständen $\Delta\mu = 0,1$ aufgestellt wurde. Unter Verwendung der Simpsonschen Formel genügte ein Integrationsintervall $\Delta u = 0,05$, um im gesamten Argumentbereich [0,5, 25] den relativen Fehler bei 10^{-6} zu halten. Im Falle $a = 0$ konnten wir mit Werten vergleichen, die wir nach der Formel

$$\phi_Q(\mu, 0) = \frac{2}{\mu} \left\{ \int_0^\mu I_0(x)\, dx - I_1(\mu) \right\} \tag{15}$$

auf 10 Stellen berechneten. Die Formel selbst geht auf eine frühere Arbeit des einen von uns zurück [2]. Zur Auswertung des Integrals (14) wurde aus der ϕ_Q-Tabelle quadratisch interpoliert und wieder nach Simpson integriert. Um nicht Rechenzeit zu vergeuden, war es notwendig, mit wachsendem μ und c die Intervallteilung in σ abschnittsweise zu verfeinern. Die Anzahl der Integrationsintervalle betrug maximal 80. Die praktische Durchrechnung erfolgte an einer elektronischen Rechenmaschine der Type IBM-650.

IV. Ergebnisse und Diskussion

Insgesamt wurden 37 Streukurven berechnet von Parallelepipeden der folgenden Kantenverhältnisse:

$a = 1$: $c = 1; 1{,}1; 1{,}2; 1{,}3; 1{,}4; 1{,}5; 1{,}6; 1{,}8; 2; 3; 5; 10$;
$a = 0{,}75$: $c = 1; 1{,}1; 1{,}2; 1{,}3; 1{,}5; 1{,}8; 2; 3; 5; 10$;
$a = 0{,}5$: $c = 1; 1{,}1; 1{,}3; 1{,}5; 2; 3; 5$;
$a = 0{,}25$: $c = 1; 1{,}5; 2$;
$a = 0$: $c = 1; 1{,}5; 2$;

sowie 0,9 : 1 : 1 und 0,6 : 1 : 1 (Tab. 1 bis 6). Die Querschnittsfunktionen der fünf Serien wurden um 10 weitere ergänzt, nämlich für

$$a = 0{,}9; 0{,}8; 0{,}7; 2/3; 0{,}6; 0{,}4; 1/3; 0{,}3; 0{,}2; 0{,}1.$$

Wie bereits eingangs erwähnt, ist der Innenteil der Streukurve vom Typus einer Gaussschen Glockenkurve für unsere Fragestellung ohne sonderliches Interesse. Zu seiner Demonstration wollen wir uns mit Abb. 2 begnügen. Für die anderen Serien ist der Kurvenverlauf ähnlich. Bei der Diskussion des Formeinflusses auf die Streukurve wollen wir uns daher ausschließlich mit dem Bereich der Nebenmaxima, insbesondere mit dem weitaus wichtigsten ersten Nebenmaximum, beschäf-

tigen, weil dort die Verschiedenheit der einzelnen Kurven besonders augenscheinlich ist. Zweckmäßigerweise beginnen wir mit den Querschnittsfunktionen (Abb. 3 und 4).

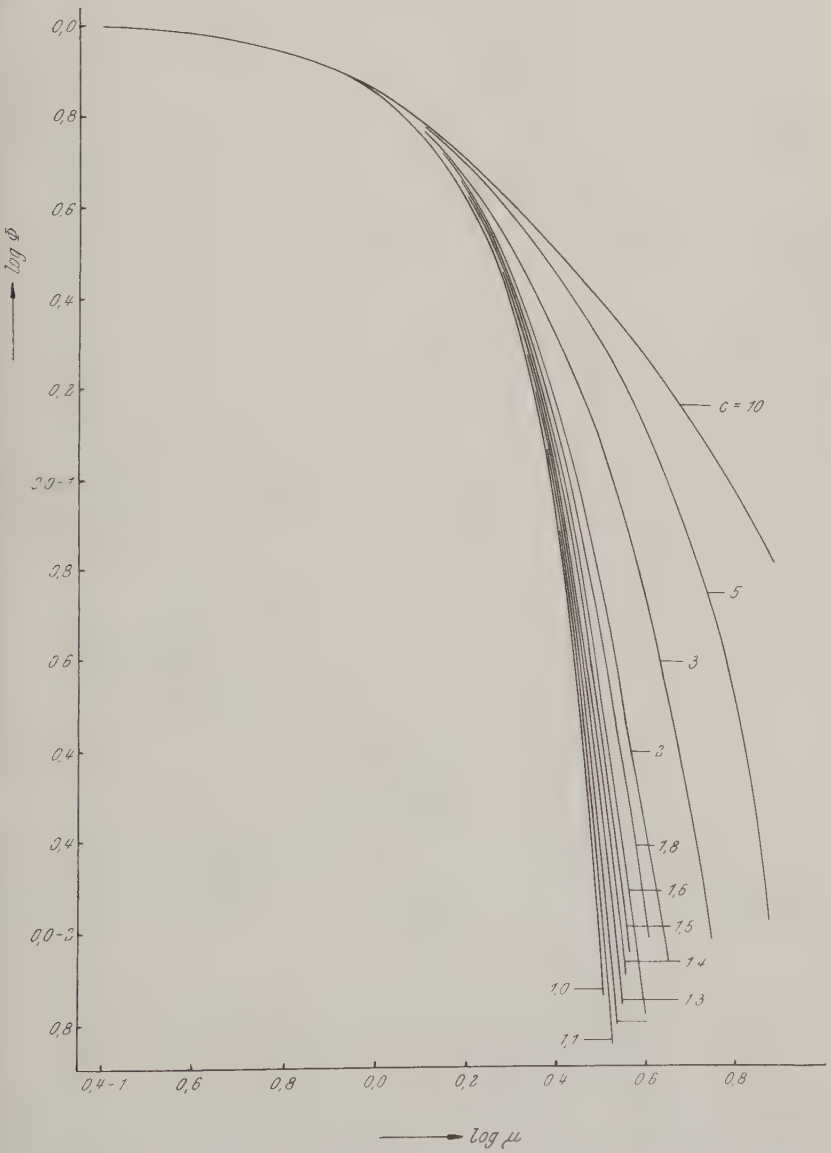

Abb. 2. Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 1 : 1 : c (Innenteil)

Nach (11) wird die Streuung des Rechtecks identisch mit der Streufunktion einer der Seiten, wenn diese in der Strahlensymmetrale liegt

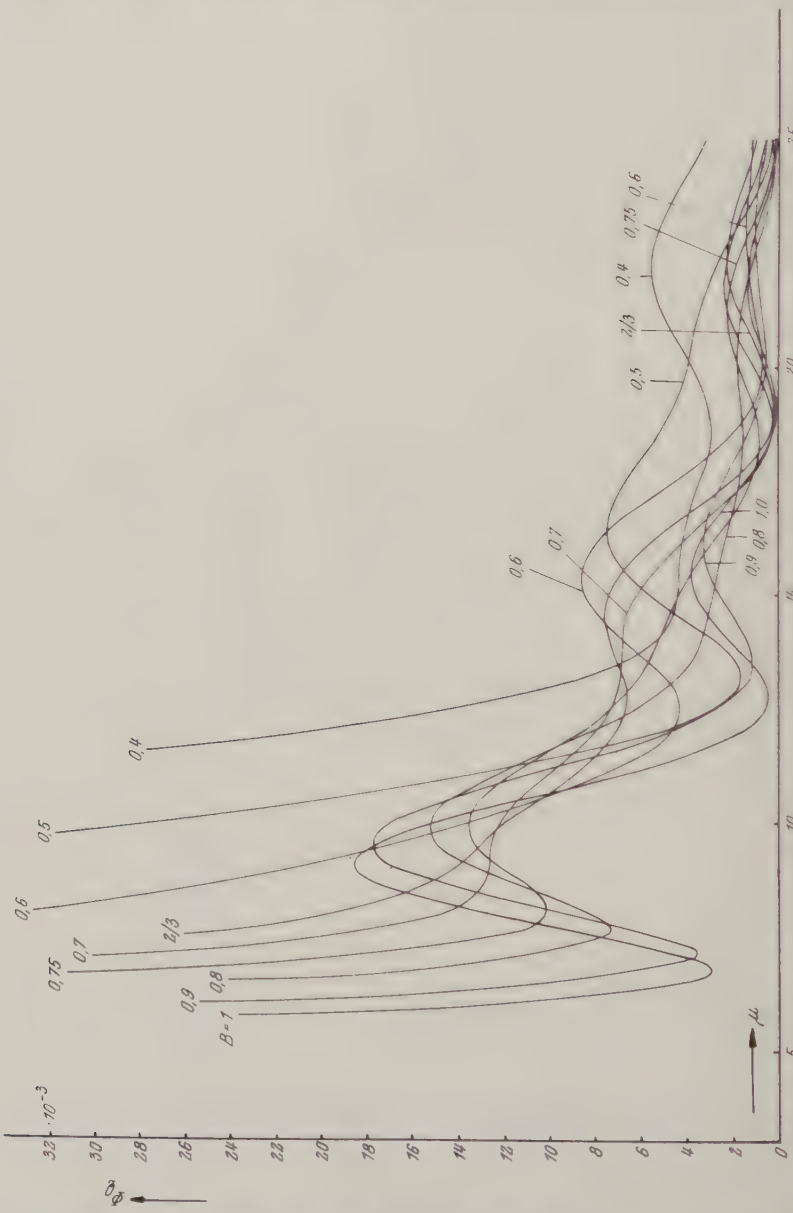

Abb. 3. Querschnittsfunktionen von Rechtecken mit verschiedenen Seitenverhältnissen

(Hauptlage). In diesem Falle, der sich als besonders interessant herausstellt, schließt sich an beide Hauptlagen ein relativ großer Lagenbereich

an, in welchem für die Streuung der Typus der Seitenfunktion erhalten bleibt. Bei Verdrehung des Rechtecks gegen eine Hauptlage ändert sich die Projektion der zugehörigen Seite anfänglich ja nur ganz gering-

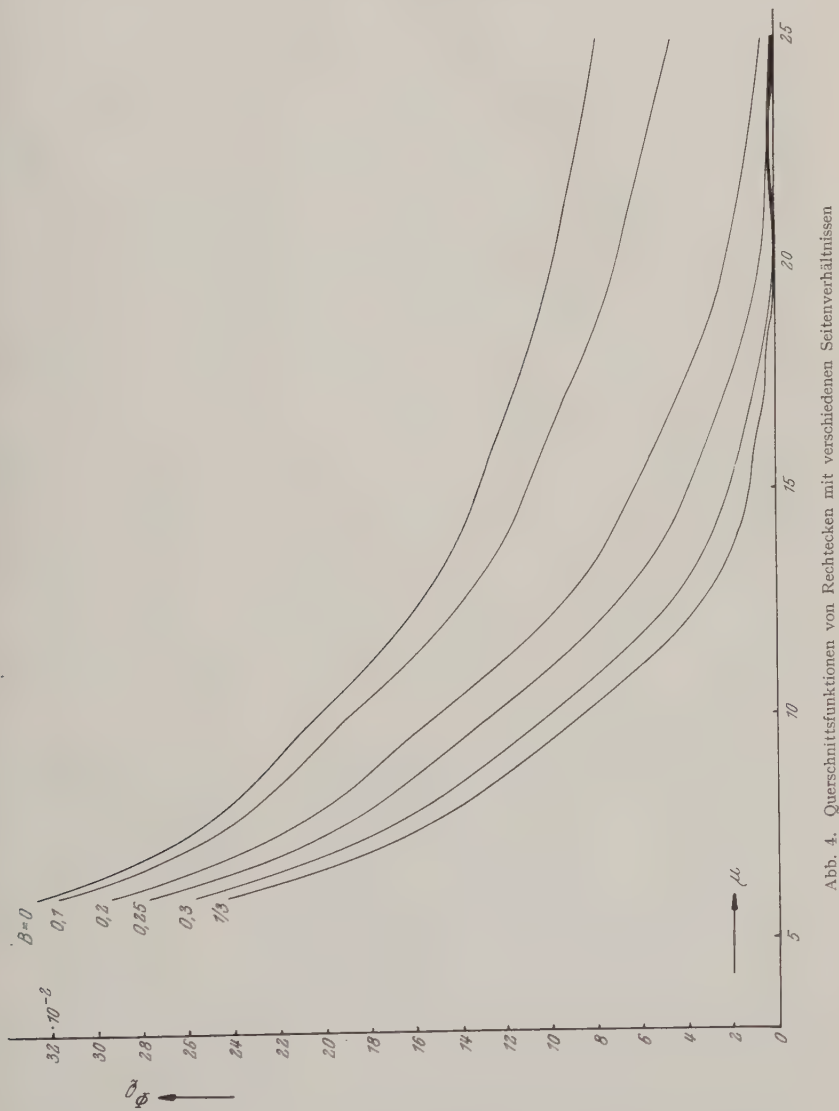

Abb. 4. Querschnittsfunktionen von Rechtecken mit verschiedenen Seitenverhältnissen

fügig, wohingegen die zweite in der Projektion noch stark verkürzte Seite nur eine mäßige Verkleinerung der Intensität bewirkt. Sobald jedoch die Seitenprojektionen miteinander ungefähr vergleichbar werden,

nimmt die Intensität im Außenteil der Kurve — wie man sich am Quadrat sofort klar macht — um Größenordnungen stärker ab als bei der Streuung des Rechtecks in Hauptlage. Weil es uns nur auf die Erfassung des Formtypus der Streukurve weniger deren absolute Größe ankommt, können wir von diesem mittleren Lagenbereich ($\varphi \sim 45^0$) überhaupt absehen, und somit erwarten, daß die einfache Mittelung der beiden Seitenfunktionen den Verlauf der exakt gemittelten Funktion annähernd wiedergibt. Für größere Verschiedenheit der Seiten kann man nicht mehr in derselben Weise argumentieren. Jedoch muß im anderen Extremfall ($a \sim 0$) der Übergang zwischen den Hauptlagen in bezug auf die Streuung immer kontinuierlicher werden, so daß auch dann wieder angenommen werden darf, daß die Querschnittsfunktion des Rechtecks etwa in der Mitte zwischen den Seitenfunktionen liegt.

Nach dieser Betrachtung ist es klar, daß für das Quadrat eine Kurve vom gleichen Typus resultiert wie $[\sin(\mu/2)/(\mu/2)]^2$. In der Tat liegen die Nebenmaxima, die stärksten, welche überhaupt auftreten, an genau den gleichen Stellen wie bei der Seitenfunktion. Mit abnehmendem a verschiebt sich nun die zugehörige Funktion zu größeren Winkeln, was notwendig eine Verschmierung der Nebenmaxima zur Folge hat. Diese muß etwa dann am größten sein, wenn das erste Minimum der A-Funktion an die Stelle des ersten Nebenmaximums der B-Funktion zu liegen kommt, was für $a = 9/12{,}8 \sim 0{,}7$ der Fall ist (s. Abb. 2). Nimmt a weiter ab, so schiebt sich das erste Nebenmaximum der A-Funktion über das zweite der B-Funktion (genau für $a = 9/15{,}5 \sim 0{,}6$), womit sich wiederum ein scharfes Maximum ausbilden kann, nun aber, da μ auf die größere Seite bezogen ist, ziemlich genau an der Stelle des zweiten Nebenmaximums der Quadratfunktion. Wir beschreiben diesen markanten Übergang deswegen in allen Einzelheiten, weil er, wie wir gleich sehen werden, von größter Bedeutung ist für das Streuverhalten der Parallelepipede selbst.

Um dieses nun zu diskutieren, wollen wir die zwei wichtigen Extremfälle herausgreifen, daß das Parallelepiped entweder noch etwa als isometrisch oder aber als sehr langes Stäbchen angesehen werden kann. Im ersten Falle gehen wir am besten von nun drei gleichberechtigten Hauptlagen aus, unter denen wir jetzt jeweils die gesamte Lagenmannigfaltigkeit verstehen, bei welcher ein und derselbe Querschnitt beliebig verdreht in der Strahlensymmetrale liegt. Die Berechtigung zu diesem Vorgehen ist ganz analog zu begründen, wie es bei der Querschnittsfunktion geschehen ist. Da bei der Serie $1:1:c$ die Fläche $1:c$ doppelt so stark bewertet wird wie das Quadrat, wird es unter Zugrundelegung dieser Vorstellung ohne weiteres plausibel, daß beim Übergang vom Würfel zu gestreckteren Formen im wesentlichen dasselbe passiert, wie bei jenem vom Quadrat zum schwach anisometrischen Rechteck. Man braucht nur in Abb. 3 auf die kleinere Rechteckseite zu beziehen und bekommt für den betrachteten Bereich ein ganz ähnliches Bild wie bei Abb. 5 ($a = 0{,}7$ entspricht dann etwa $c = 10/7 \sim 1{,}4$ und $a = 0{,}6$ einem $c = 10/6 \sim 1{,}7$).

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß dieser scharfe Übergang im Bereiche schwacher Anisometrie auch bei den Zylindern zu

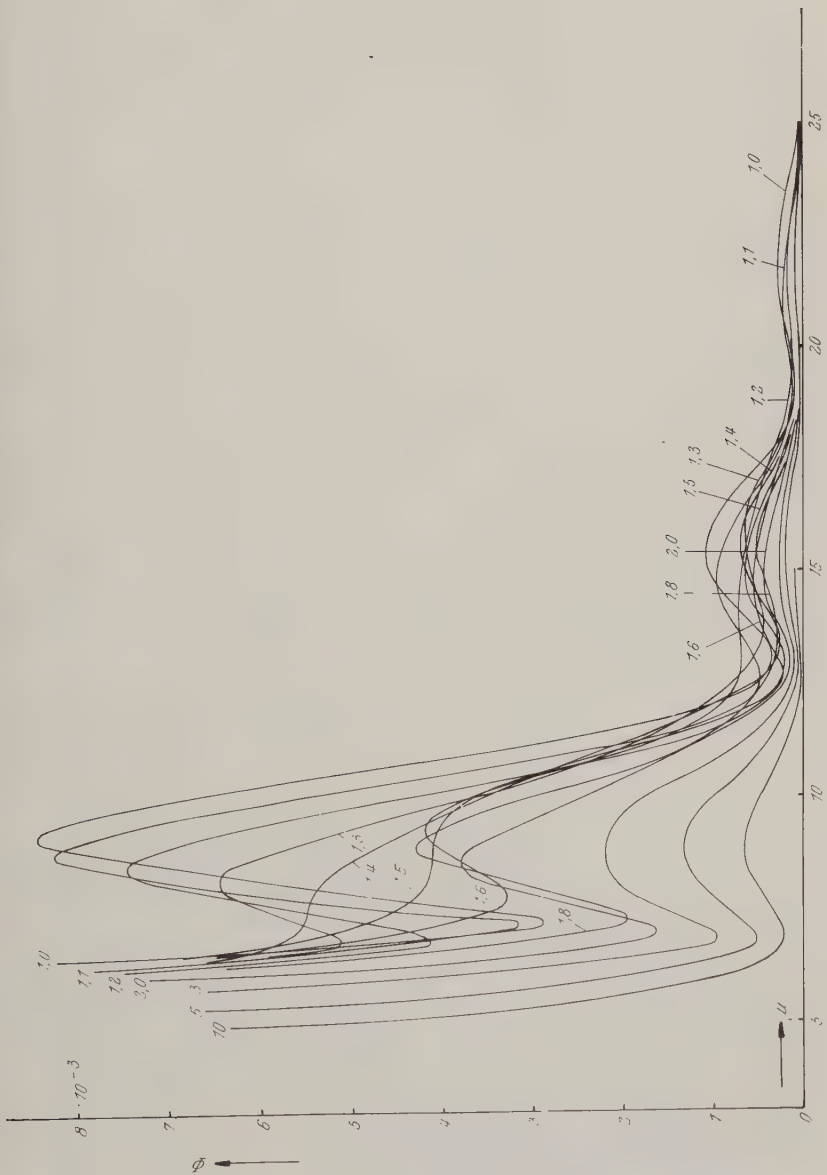

Abb. 5. Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 1 : 1 : c

finden ist. Eine ausführlichere Diskussion ebenso wie eine eingehendere

Analyse des Formeinflusses auf die Streukurve sei einer späteren zusammenfassenden Arbeit vorbehalten.

Haben wir den zweiten angeführten Fall vor uns, daß eine Dimension die beiden anderen bedeutend überwiegt, greifen wir besser auf die Querschnitts-Längsspaltung zurück, von der wir zu allem Anfang ausgegangen sind [Formel (8) bzw. (14)]. Sie liefert in aller Strenge das bekannte Ergebnis, daß für sehr große c die Beziehung gilt:

$$\phi(\mu) \sim \frac{\pi}{\mu c} \phi_Q(\mu), \tag{16}$$

wobei $\phi_Q(\mu)$ die Querschnittsfunktion des konstant gehaltenen kleinsten Querschnitts ist. Eine anschauliche Deutung dieses Sachverhalts hat der eine von uns in einer früheren Arbeit gegeben (16).

In der Praxis stellt sich heraus, daß (16) im allgemeinen bereits für recht mäßige Werte von c eine gute Näherung darstellt. Eine gewisse Rolle spielt hierbei die Form des Querschnitts, wie aus den Abb. 11 bis 13 zu ersehen ist. Die Übereinstimmung wird besonders gut für den extrem isometrischen wie anisometrischen Querschnitt. Die Abweichungen, die auftreten, sind insbesondere im ersten Fall nur lokale Störungen des glatten Kurvenverlaufs, welche experimentell wohl kaum erfaßbar sind. Für den schwach anisometrischen Querschnitt ist die Näherung ersichtlich schlechter.

Der Vollständigkeit halber sei noch eine andere Näherungsformel angeführt, und zwar für die Streufunktion der rechteckigen Lamelle, abgeleitet von dem einen von uns in einer früheren Arbeit [2]. In unserer Bezeichnungsweise erhält sie die Form

$$\phi(\mu, 0, c) = \frac{\pi}{\mu c} \left\{ \phi_Q(\mu, 0) - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu c} \left[\left(\frac{\sin(\mu/2)}{\mu/2} \right)^2 + \frac{\sin \mu c}{\mu c} \right] \right\} \tag{17}$$

wobei $\phi_Q(\mu, 0)$ durch (15) erklärt ist. Für das Quadrat sind einige nach (17) berechnete Werte zum Vergleich in Abb. 13 eingezeichnet.

Die vorliegende Arbeit wurde von Prof. Dr. O. Kratky angeregt. Hierfür sowie für die außerordentliche Förderung, ohne welche sie in diesem Umfang nicht hätte zustande kommen können, sind wir ihm zu größtem Dank verpflichtet. Unser aufrichtiger Dank gilt weiters Prof. Dr. R. Inzinger, Vorstand des III. Institutes für Mathematik und des Mathematischen Labors der Technischen Hochschule Wien, und Prof. Dr. W. Knödel für das überaus große Entgegenkommen bei der praktischen Arbeit an der elektronischen Rechenmaschine. Schließlich haben wir Herrn Dr. V. Scheiber zu danken, der die Programmierung besorgte und die numerische Durchführung der Rechnung leitete, ebenso Herrn Handler für freundliche Mithilfe.

Das Zeichnen der Kurven übernahm gefälligerweise Herr E. Wrentschur.

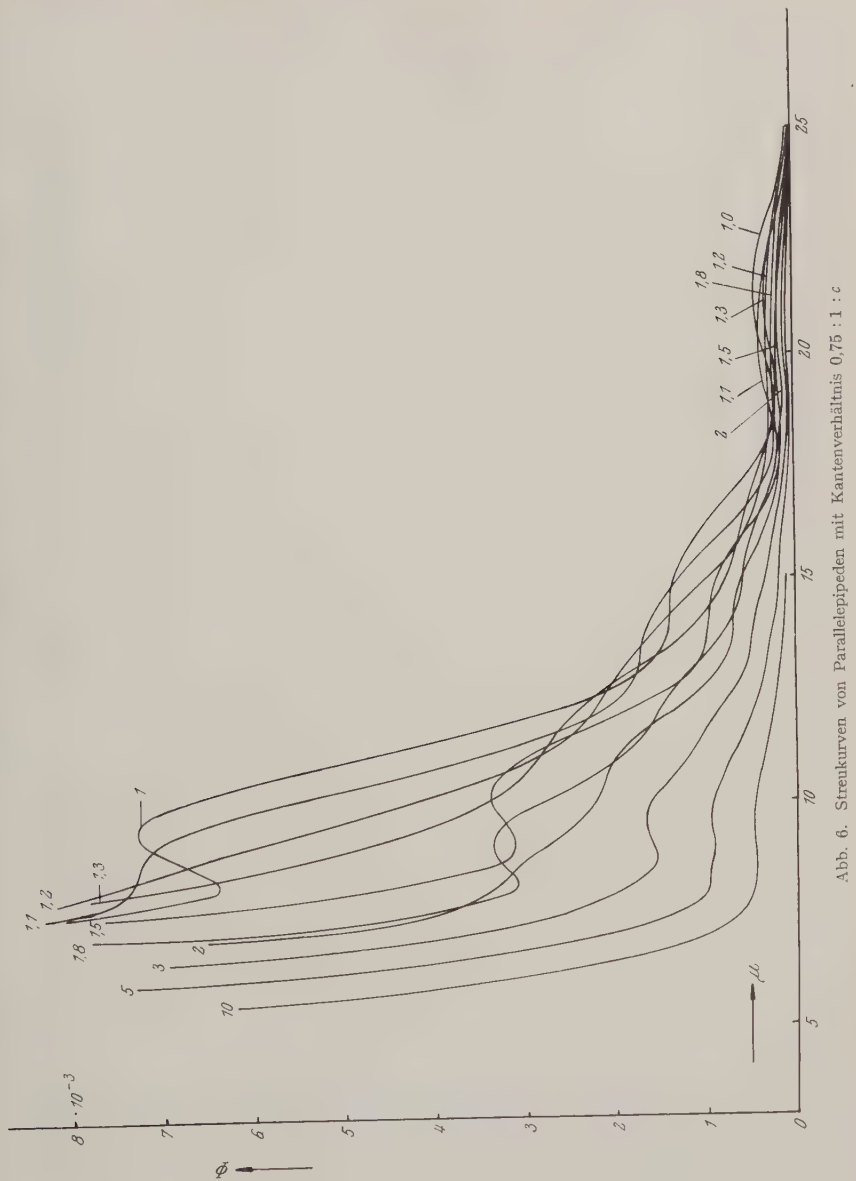

Abb. 6. Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0,75 : 1 : c

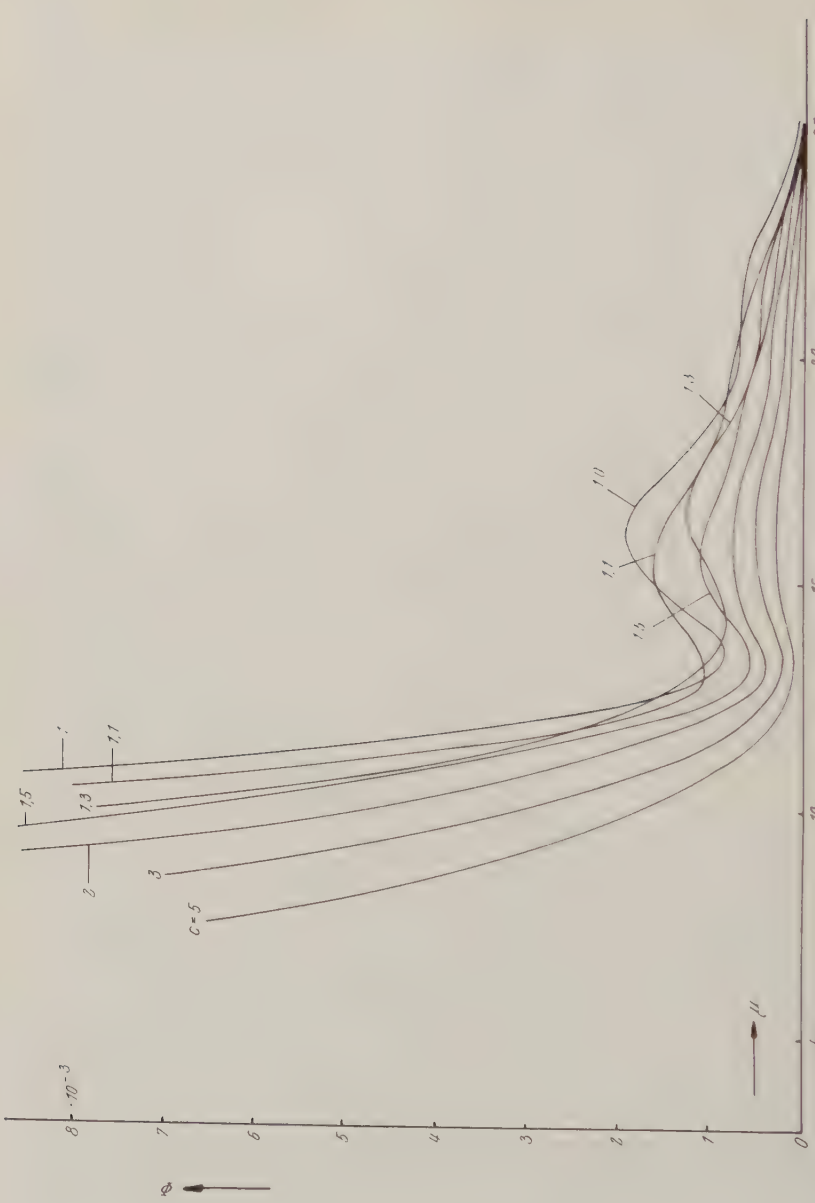

Abb. 7. Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0,5 : 1 : c

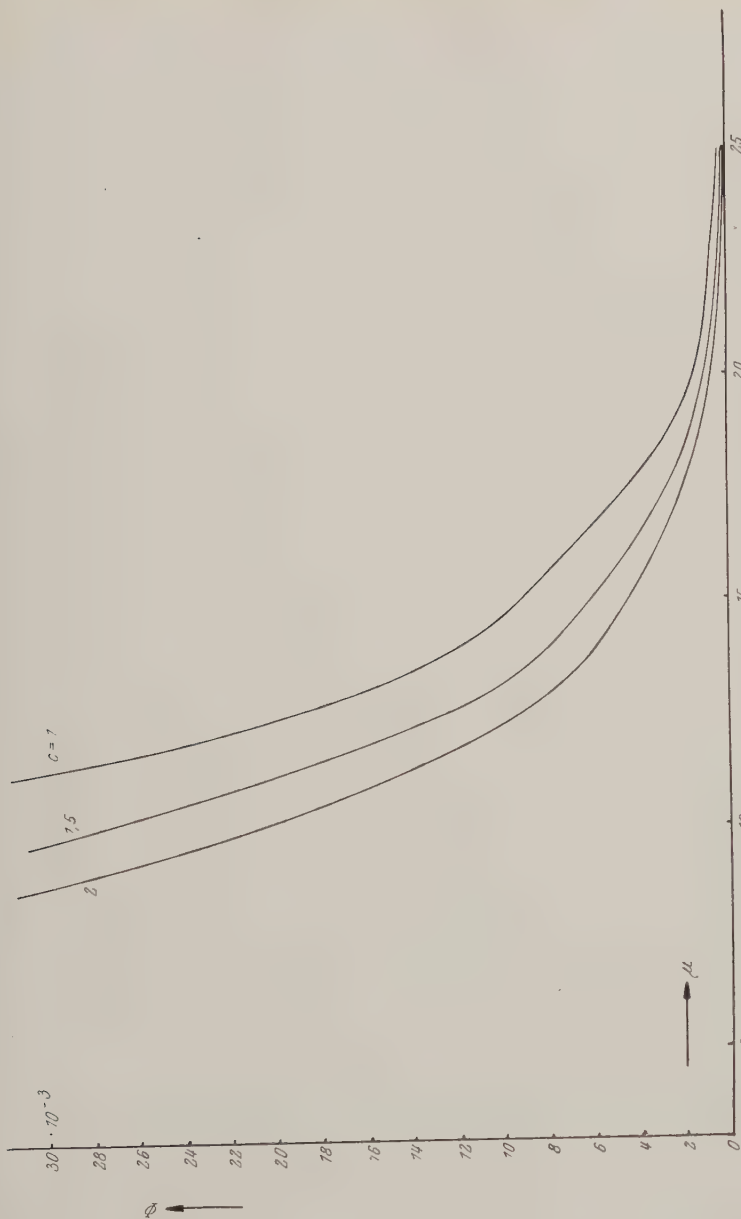

Abb. 8. Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0,25 : 1 : c

Abb. 9. Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0 : 1 : c (Lamellen)

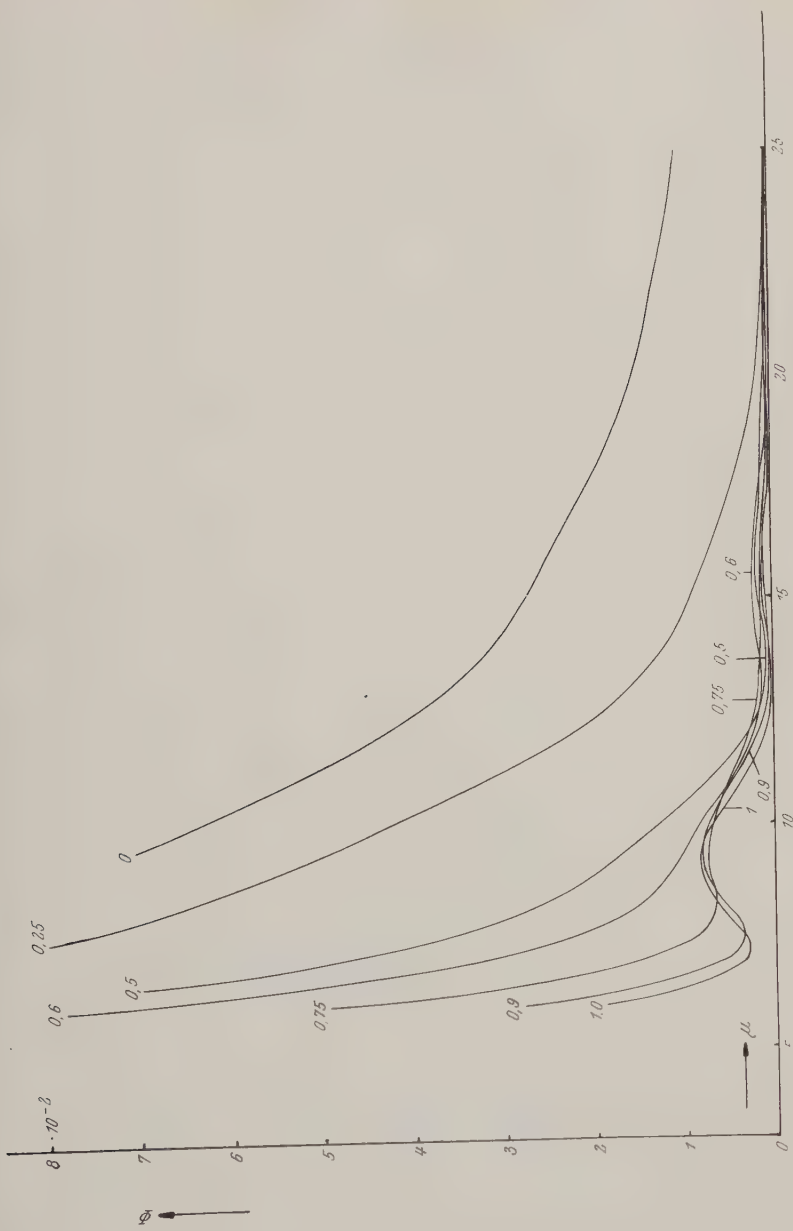

Abb. 10. Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis $a : 1 : 1$

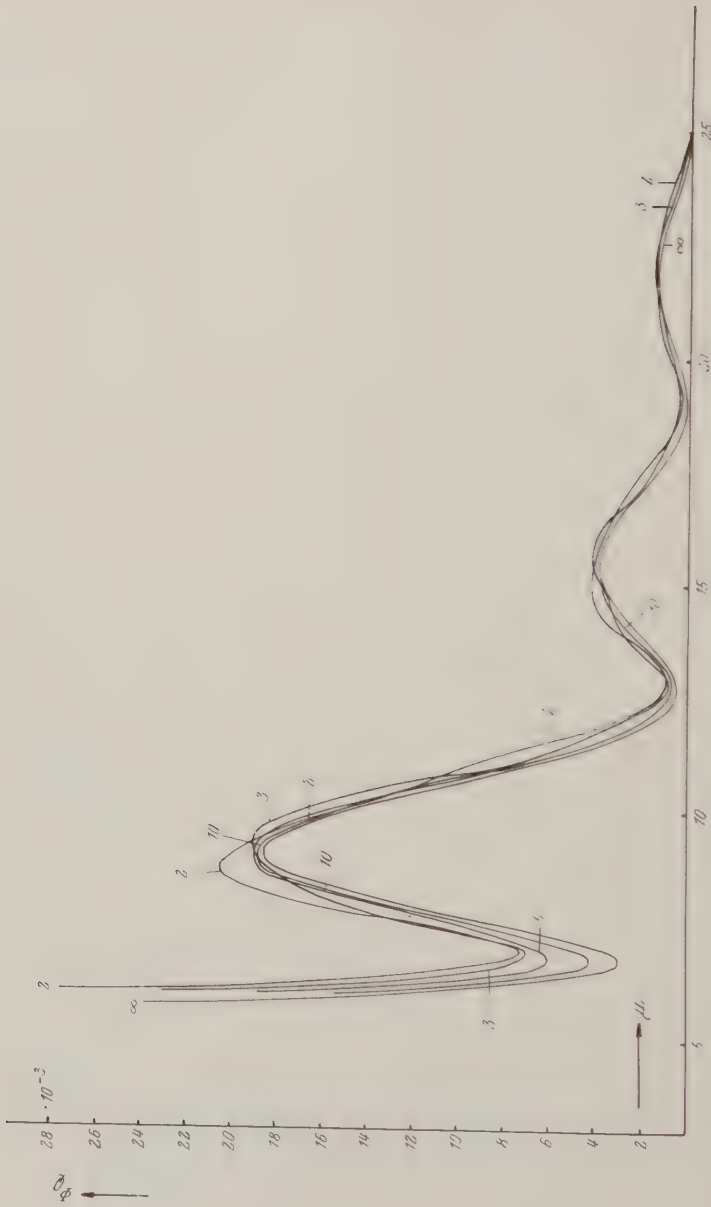

Abb. 11. Pseudoquerschnittsfunktionen von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 1 : 1 :

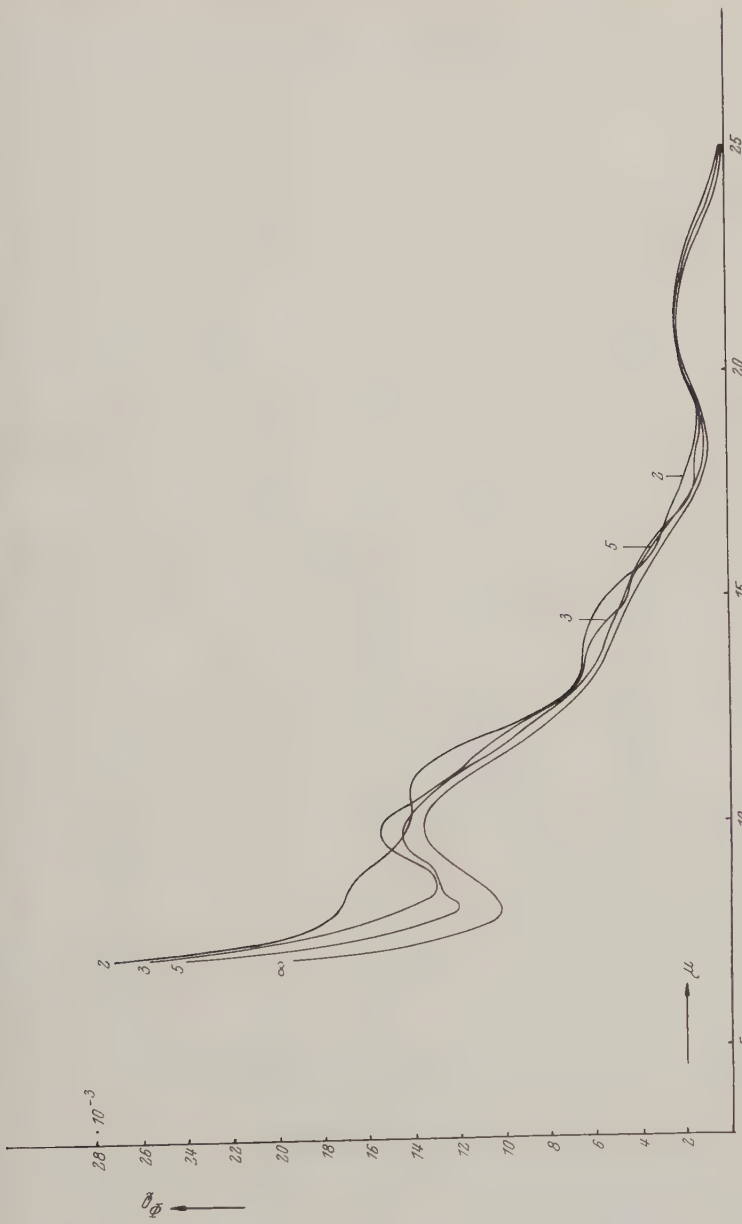

Abb. 12. Pseudoquerschnittsfunktionen von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0,75 : 1 : c

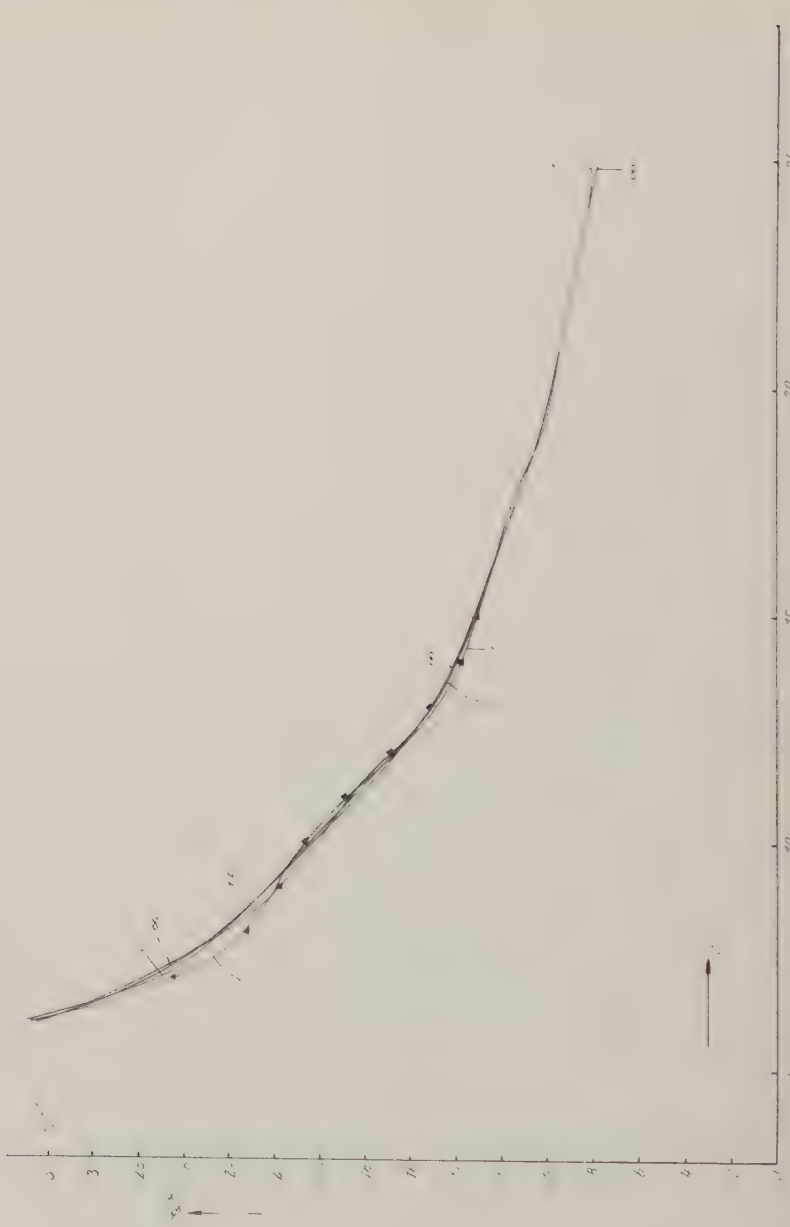

Abb. 13. Pseudoquerschnittsfunktionen von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis $0:1:\varepsilon$ (Lamellen)

Tabelle 1. Theoretische Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis $1 : 1 : c$
(vgl. Abb. 5)

sB	$c = 1$	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
0,5	0,9794	0,9779	0,9764	0,9747	0,9728	0,9709
1,0	0,9197	0,9143	0,9084	0,9021	0,8954	0,8882
1,5	0,8292	0,8162	0,8044	0,7919	0,7786	0,7648
2,0	0,7115	0,6945	0,6766	0,6578	0,6384	0,6186
2,5	0,5837	0,5616	0,5387	0,5155	0,4920	0,4687
3,0	0,4549	0,4296	0,4042	0,3792	0,3549	0,3316
3,5	0,3400	0,3089	0,2838	0,2601	0,2381	0,2182
4,0	0,2312	0,2070	0,1848	0,1649	0,1477	0,1330
4,5	0,1478	0,1274	0,1099	0,09548	0,08397	0,07514
5,0	0,08693	0,07063	0,05863	0,04980	0,04369	0,03970
5,5	0,04494	0,03420	0,02740	0,02334	0,02124	0,02033
6,0	0,01946	0,01399	0,01130	0,01047	0,01059	0,01092
6,5	0,007154	0,005215	0,005137	0,005871	0,006599	0,006843
7,0	0,003110	0,003333	0,004377	0,005306	0,005606	0,005185
7,5	0,003547	0,004659	0,005677	0,005990	0,005504	0,004499
8,0	0,005621	0,006661	0,007005	0,006480	0,005388	0,004219
8,5	0,007523	0,007949	0,007460	0,006315	0,005053	0,004143
9,0	0,008389	0,008053	0,006936	0,005592	0,004575	0,004129
9,5	0,008062	0,007109	0,005742	0,004601	0,004046	0,004006
10,0	0,006817	0,005548	0,004304	0,003602	0,003489	0,003632
10,5	0,005109	0,003843	0,002972	0,002739	0,002884	0,002974
11,0	0,003376	0,002359	0,001944	0,002047	0,002223	0,002130
11,5	0,001937	0,001294	0,001268	0,001503	0,001548	0,001286
12,0	0,0009509	0,0006884	0,0008949	0,001079	0,0009444	0,0006232
12,5	0,0004343	0,0004681	0,0007319	0,0007596	0,0005004	0,0002493
13,0	0,0003031	0,0005050	0,0006875	0,0005477	0,0002689	0,0001632
14,0	0,0006592	0,0008346	0,0007074	0,0004405	0,0003518	0,0004543
15,0	0,001048	0,0009674	0,0006957	0,0005887	0,0006553	0,0006721
16,0	0,001017	0,0007666	0,0006088	0,0006468	0,0006627	0,0005380
17,0	0,0006470	0,0004369	0,0004405	0,0004835	0,0003862	0,0003012
18,0	0,0002502	0,0001923	0,0002650	0,0002165	0,0001303	0,0001566
19,0	0,0000702	0,0001280	0,0001437	0,0000570	0,0000627	0,0000990
20,0	0,0001110	0,0001797	0,0001121	0,0000767	0,0001181	0,0000888
21,0	0,0002373	0,0002279	0,0001466	0,0001720	0,0001653	0,0001176
22,0	0,0002899	0,0002077	0,0001831	0,0002055	0,0001542	0,0001493
23,0	0,0002202	0,0001395	0,0001683	0,0001430	0,0001115	0,0001301
24,0	0,0001033	0,0000843	0,0001082	0,0000615	0,0000744	0,0000683
25,0	0,0000224	0,0000573	0,0000375	0,0000217	0,0000397	0,0000142

sB	$c = 1{,}6$	1,8	2	3	5	10
0,5	0,9688	0,9643	0,9592	0,9269	0,8340	0,5530
1,0	0,8806	0,8644	0,8468	0,7434	0,5249	0,2728
1,5	0,7504	0,7202	0,6887	0,5289	0,3189	0,1668
2,0	0,5984	0,5577	0,5175	0,3509	0,2150	0,1091

Fortsetzung auf S. 206

Fortsetzung von S. 205.

sB	$c = 1{,}6$	1.8	2	3	5	10
2,5	0,4458	0,4019	0,3616	0,2314	0,1433	0,07232
3,0	0,3097	0,2704	0,2378	0,1556	0,09376	0,04719
3,5	0,2003	0,1711	0,1499	0,1024	0,06026	0,02972
4,0	0,1209	0,1033	0,09220	0,06253	0,03604	0,01777
4,5	0,06857	0,06034	0,05559	0,03500	0,02062	0,009909
5,0	0,03721	0,03445	0,03202	0,01859	0,01060	0,005020
5,5	0,01994	0,01895	0,01664	0,009355	0,004771	0,002214
6,0	0,01098	0,009675	0,007260	0,004026	0,001970	0,0008038
6,5	0,006463	0,004490	0,002706	0,001465	0,0006890	0,0002692
7.0	0,004262	0,002299	0,001643	0,001065	0,0005914	0,0002194
7,5	0,003401	0,002175	0,002376	0,001612	0,0008063	0,0003716
8,0	0,003377	0,003065	0,003378	0,002040	0,001099	0,0005444
8,5	0,003767	0,003970	0,003804	0,002167	0,001340	0,0006475
9,0	0,004136	0,004263	0,003567	0,002204	0,001320	0,0006588
9,5	0,004140	0,003829	0,002990	0,002105	0,001219	0,0005926
10,0	0,003648	0,002944	0,002390	0,001724	0,0009728	0,0004768
10,5	0,002773	0,001998	0,001871	0,001186	0,0006936	0,0003412
11,0	0,001779	0,001267	0,001385	0,0007512	0,0004581	0,0002130
11,5	0,0009396	0,0008151	0,0008940	0,0004778	0,0002882	0,0001128
12,0	0,0004132	0,0005640	0,0004571	0,0002687	0,0001238	0,0000498
12,5	0,0002203	0,0004100	0,0001793	0,0001105	0,0000557	0,0000218
13,0	0,0002592	0,0003037	0,0001123	0,0000734	0,0000430	0,0000192
13,5				0,0001415		
14,0	0,0005053	0,0002786	0,0003452	0,0002118	0,0001020	0,0000504
14,5			0,0004347	0,0002388		
15,0	0,0005438	0,0004660	0,0004452	0,0002578	0,0001607	0,0000793
15,5			0,0004064	0,0002807		
16,0	0,0004478	0,0004898	0,0003584	0,0002689	0,0001520	
16,5				0,0002102		
17,0	0,0003322	0,0002703	0,0002646	0,0001453	0,0000914	
17,5			0,0001959	0,0001033		
18,0	0,0001777	0,0000979	0,0001165	0,0000702	0,0000310	
18,5			0,0000517	0,0000341		
19,0	0,0000534	0,0000663	0,0000231	0,0000133	0,0000073	
19,5			0,0000324	0,0000211		
20,0	0,0000573	0,0000744	0,0000630	0,0000406	0,0000187	
20,5			0,0000928	0,0000521		
21,0	0,0001351	0,0000976	0,0001078	0,0000589	0,0000384	
21,5			0,0001084	0,0000696		
22,0	0,0001576	0,0001263	0,0001023	0,0000760	0,0000430	
22,5			0,0000945	0,0000674		
23,0	0,0001026	0,0001037	0,0000841	0,0000499	0,0000299	
23,5			0,0000695	0,0000364		
24,0	0,0000491	0,0000451	0,0000487	0,0000285	0,0000135	
24,5				0,0000152		
25,0	0,0000277	0,0000123	0,0000092	0,0000054	0,0000031	
8.75					0,001350	
9,25					0,001280	

Tabelle 2. Theoretische Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0,75 : 1 : c
(vgl. Abb. 6)

sB	$c = 1$	1,1	1,2	1,3	1,5
0,5	0,9823	0,9809	0,9793	0,9776	0,9739
1,0	0,9310	0,9256	0,9197	0,9134	0,8994
1,5	0,8509	0,8397	0,8277	0,8149	0,7873
2,0	0,7490	0,7314	0,7129	0,6936	0,6531
2,5	0,6340	0,6108	0,5868	0,5624	0,5132
3,0	0,5151	0,4879	0,4606	0,4336	0,3821
3,5	0,4004	0,3716	0,3437	0,3172	0,2700
4,0	0,2967	0,2689	0,2431	0,2199	0,1818
4,5	0,2085	0,1839	0,1625	0,1444	0,1177
5,0	0,1381	0,1184	0,1024	0,09004	0,07424
5,5	0,08568	0,07137	0,06100	0,05393	0,04642
6,0	0,04945	0,04044	0,03490	0,03184	0,02920
6,5	0,02668	0,02208	0,02005	0,01938	0,01853
7,0	0,01404	0,01259	0,01256	0,01279	0,01176
7,5	0,008266	0,008588	0,009226	0,009335	0,007427
8,0	0,006505	0,007421	0,007812	0,007313	0,004811
8,5	0,006593	0,007271	0,006988	0,005897	0,003506
9,0	0,007106	0,007122	0,006164	0,004794	0,003123
9,5	0,007284	0,006582	0,005224	0,003961	0,003223
10,0	0,006885	0,005663	0,004273	0,003403	0,003391
10,5	0,005993	0,004567	0,003458	0,003072	0,003347
11,0	0,004843	0,003525	0,002861	0,002867	0,003005
11,5	0,003691	0,002698	0,002481	0,002683	0,002450
12,0	0,002726	0,002152	0,002254	0,002439	0,001855
12,5	0,002043	0,001858	0,002092	0,002115	0,001378
13,0	0,001642	0,001732	0,001924	0,001743	0,001094
14,0	0,001410	0,001610	0,001462	0,001079	0,0009562
15,0	0,001353	0,001292	0,0009371	0,0007392	0,0008570
16,0	0,001078	0,0007887	0,0005555	0,0006130	0,0005323
17,0	0,0006408	0,0003714	0,0003798	0,0004659	0,0002477
18,0	0,0002997	0,0002162	0,0003234	0,0002743	0,0001814
19,0	0,0002108	0,0002769	0,0002990	0,0001746	0,0002177
20,0	0,0003190	0,0003816	0,0002835	0,0002196	0,0002301
21,0	0,0004163	0,0003964	0,0002798	0,0003035	0,0002249
22,0	0,0004145	0,0003075	0,0002689	0,0002973	0,0002178
23,0	0,0002887	0,0001861	0,0002195	0,0001900	0,0001718
24,0	0,0001301	0,0001020	0,0001323	0,0000741	0,0000842
25,0	0,0000373	0,0000743	0,0000529	0,0000294	0,0000215

sB	$c = 1{,}8$	2	3	5	10
0,5	0,9672	0,9622	0,9298	0,8367	0,5551
1,0	0,8754	0,8576	0,7534	0,5330	0,2775
1,5	0,7420	0,7099	0,5469	0,3315	0,1737
2,0	0,5902	0,5486	0,3752	0,2309	0,1176

Fortsetzung auf S. 208.

Fortsetzung von S. 207.

sB	$c = 1{,}8$	2	3	5	10
2,5	0,4425	0,3997	0,2592	0,1611	0,8165
3,0	0,3151	0,2791	0,1846	0,1121	0,05669
3,5	0,2158	0,1906	0,1307	0,07789	0,03877
4,0	0,1445	0,1295	0,08836	0,05193	0,02587
4,5	0,09586	0,08773	0,05707	0,03407	0,01673
5,0	0,06321	0,05810	0,03621	0,02128	0,01039
5,5	0,04079	0,03645	0,02250	0,01265	0,006152
6,0	0,02506	0,02110	0,01305	0,007302	0,003443
6,5	0,01426	0,01133	0,006982	0,003894	0,001834
7,0	0,007584	0,006171	0,003874	0,002180	0,0009756
7,5	0,004242	0,004076	0,002590	0,001307	0,0005860
8,0	0,003175	0,003437	0,001958	0,0009682	0,0004519
8,5	0,003203	0,003147	0,001610	0,0009504	0,0004326
9,0	0,003389	0,002802	0,001587	0,0009229	0,0004478
9,5	0,003275	0,002456	0,001695	0,0009588	0,0004569
10,0	0,002855	0,002240	0,001630	0,0009088	0,0004422
10,5	0,002345	0,002135	0,001391	0,0008131	0,0004017
11,0	0,001943	0,002004	0,001175	0,0007191	0,0003444
11,5	0,001698	0,001740	0,001035	0,0005784	0,0002840
12,0	0,001534	0,001374	0,0008718	0,0004848	0,0002314
12,5	0,001356	0,001031	0,0006764	0,0003935	0,0001903
13,0	0,001129	0,0008185	0,0005449	0,0003249	0,0001598
13,5			0,0004997		
14,0	0,0007087	0,0007221	0,0004604	0,0002457	0,0001206
14,5			0,0003859		
15,0	0,0005744	0,0005657	0,0003188	0,0001942	0,0000942
15,5			0,0002846		
16,0	0,0004739	0,0003255	0,0002455	0,0001343	
16,5			0,0001789		
17,0	0,0002407	0,0002269	0,0001183	0,0000736	
17,5			0,0000929		
18,0	0,0001149	0,0001476	0,0000849	0,0000386	
18,5			0,0000721		
19,0	0,0001571	0,0000999	0,0000664	0,0000393	
19,5			0,0000834		
20,0	0,0001932	0,0001620	0,0001077	0,0000589	
20,5			0,0001168		
21,0	0,0001878	0,0001960	0,0001139	0,0000711	
21,5			0,0001128		
22,0	0,0001822	0,0001526	0,0001096	0,0000625	
22,5			0,0000924		
23,0	0,0001368	0,0001090	0,0000661	0,0000388	
23,5					
24,0	0,0000555	0,0000601	0,0000330	0,0000159	
24,5					
25,0	0,0000172	0,0000149	0,0000092	0,0000051	
8,25				0,0009533	
8,75				0,0009330	

Tabelle 3. Theoretische Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0,5 : 1 : c
(vgl. Abb. 7)

sB	$c = 1$	1,1	1,3	1,5	2	3	5
0,5	0,9845	0,9831	0,9798	0,9760	0,9643	0,9319	0,8386
1,0	0,9393	0,9338	0,9215	0,9074	0,8655	0,7607	0,5389
1,5	0,8683	0,8570	0,8319	0,8040	0,7256	0,5603	0,3409
2,0	0,7774	0,7595	0,7208	0,6794	0,5723	0,3938	0,2431
2,5	0,6738	0,6497	0,5995	0,5484	0,4301	0,2815	0,1755
3,0	0,5649	0,5363	0,4789	0,4242	0,3138	0,2093	0,1278
3,5	0,4580	0,4270	0,3680	0,3163	0,2274	0,1566	0,09410
4,0	0,3590	0,3281	0,2730	0,2294	0,1665	0,1142	0,06797
4,5	0,2721	0,2437	0,1969	0,1641	0,1234	0,08179	0,04931
5,0	0,1999	0,1756	0,1395	0,1175	0,09130	0,05900	0,03527
5,5	0,1429	0,1239	0,09861	0,08530	0,06638	0,04284	0,02506
6,0	0,1003	0,08665	0,07082	0,06315	0,04720	0,03066	0,01798
6,5	0,07013	0,06131	0,05240	0,04739	0,03334	0,02175	0,01281
7,0	0,04990	0,04484	0,04003	0,03566	0,02414	0,01588	0,009405
7,5	0,03690	0,03437	0,03127	0,02664	0,01832	0,01208	0,006993
8,0	0,02871	0,02751	0,02453	0,01977	0,01442	0,009240	0,005300
8,5	0,02335	0,02255	0,01901	0,01472	0,01137	0,007004	0,004140
9,0	0,01941	0,01843	0,01440	0,01118	0,008730	0,005415	0,003175
9,5	0,01605	0,01467	0,01065	0,008724	0,006507	0,004277	0,002463
10,0	0,01288	0,01116	0,007736	0,006924	0,004803	0,003254	0,001837
10,5	0,009846	0,008001	0,005586	0,005424	0,003576	0,002287	0,001307
11,0	0,007059	0,005364	0,004062	0,004041	0,002647	0,001539	0,0009038
11,5	0,004688	0,003366	0,002993	0,002766	0,001853	0,001041	0,0005551
12,0	0,002869	0,002035	0,002227	0,001700	0,001161	0,0006696	0,0003378
12,5	0,001655	0,001306	0,001660	0,0009538	0,0006485	0,0003766	0,0001932
13,0	0,001012	0,001043	0,001246	0,0005745	0,0003918	0,0002319	0,0001235
13,5						0,0002433	
14,0	0,0009706	0,001268	0,0008434	0,0006653	0,0005013	0,0003088	0,0001486
14,5						0,0003575	
15,0	0,001580	0,001606	0,0009416	0,001052	0,0007157	0,0004100	0,0002488
15,5						0,0004809	
16,0	0,001920	0,001587	0,001209	0,001105	0,0007399	0,0005245	0,0003025
16,5						0,0005076	
17,0	0,001728	0,001304	0,001254	0,0009265	0,0007335	0,0004611	0,0002796
17,5						0,0004227	
18,0	0,001254	0,001020	0,001002	0,0007710	0,0006056	0,0003847	0,0002175
18,5						0,0003300	
19,0	0,0008588	0,0008513	0,0006861	0,0006520	0,0004190	0,0002758	0,0001631
19,5						0,0002465	
20,0	0,0006986	0,0007706	0,0005189	0,0005104	0,0003526	0,0002337	0,0001330
20,5						0,0002144	
21,0	0,0006801	0,0006595	0,0004843	0,0003858	0,0003166	0,0001889	0,0001144
21,5						0,0001709	
22,0	0,0006227	0,0004751	0,0004314	0,0003146	0,0002288	0,0001571	0,0000899
22,5						0,0001324	
23,0	0,0004448	0,0002898	0,0002874	0,0002439	0,0001560	0,0000981	0,0000566
23,5						0,0000691	
24,0	0,0002161	0,0001502	0,0001249	0,0001340	0,0000916	0,0000501	0,0000255
24,5						0,0000330	
25,0	0,0000679	0,0001054	0,0000471	0,0000425	0,0000289	0,0000170	0,0000087

Tabelle 4. Theoretische Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0,25 : 1 : c
(vgl. Abb. 8)

sB	$c = 1$	1,1	2	sB	$c = 1$	1,5	2
0,5	0,9858	0,9773	0,9655	10,0	0,04294	0,02727	0,02022
1,0	0,9443	0,9124	0,8702	10,5	0,03726	0,02385	0,01749
1,5	0,8790	0,8143	0,7352	11,0	0,03184	0,02061	0,01512
2,0	0,7952	0,6958	0,5871	11,5	0,02686	0,01754	0,01294
2,5	0,6993	0,5710	0,4496	12,0	0,02249	0,01474	0,01093
3,0	0,5980	0,4522	0,3371	12,5	0,01882	0,01233	0,009154
3,5	0,4977	0,3484	0,2532	13,0	0,01585	0,01038	0,007719
4,0	0,4041	0,2643	0,1939	14,0	0,01175	0,007761	0,005790
4,5	0,3210	0,2004	0,1516	15,0	0,009193	0,006052	0,004428
5,0	0,2508	0,1541	0,1197	16,0	0,007208	0,004544	0,003265
5,5	0,1944	0,1215	0,09447	17,0	0,005330	0,003203	0,002393
6,0	0,1511	0,09836	0,07448	18,0	0,003607	0,002206	0,001659
6,5	0,1192	0,08125	0,05944	19,0	0,002292	0,001519	0,001045
7,0	0,09659	0,06789	0,04882	20,0	0,001509	0,001020	0,0007029
7,5	0,08088	0,05707	0,04147	21,0	0,001142	0,0006842	0,0005214
8,0	0,06983	0,04824	0,03601	22,0	0,0009420	0,0005057	0,0003654
8,5	0,06161	0,04116	0,03141	23,0	0,0007216	0,0003944	0,0002596
9,0	0,05487	0,03555	0,02722	24,0	0,0004572	0,0002630	0,0001774
9,5	0,04878	0,03106	0,02345	25,0	0,0002459	0,0001412	0,0000952

Tabelle 5. Theoretische Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis 0 : 1 : c
(vgl. Abb. 9.)

sB	$c = 1$	1,5	2	sB	$c = 1$	1,5	2
0,5	0,9862	0,9777	0,9660	10,0	0,06481	0,04238	0,03175
1,0	0,9460	0,9140	0,8718	10,5	0,05900	0,03881	0,02890
1,5	0,8827	0,8177	0,7385	11,0	0,05341	0,03541	0,02638
2,0	0,8013	0,7014	0,5922	11,5	0,04819	0,03214	0,02404
2,5	0,7080	0,5788	0,4564	12,0	0,04352	0,02911	0,02184
3,0	0,6095	0,4620	0,3452	12,5	0,03950	0,02644	0,01987
3,5	0,5119	0,3600	0,2625	13,0	0,03614	0,02422	0,01821
4,0	0,4206	0,2772	0,2040	14,0	0,03118	0,02099	0,01581
4,5	0,3394	0,2142	0,1624	15,0	0,02775	0,01866	0,01398
5,0	0,2707	0,1686	0,1310	16,0	0,02488	0,01653	0,01233
5,5	0,2153	0,1364	0,1060	17,0	0,02210	0,01455	0,01096
6,0	0,1726	0,1135	0,08626	18,0	0,01946	0,01290	0,009734
6,5	0,1411	0,09657	0,07132	19,0	0,01718	0,01156	0,008619
7,0	0,1186	0,08332	0,06071	20,0	0,01544	0,01041	0,007778
7,5	0,1030	0,07255	0,05334	21,0	0,01414	0,009442	0,007119
8,0	0,09193	0,06372	0,04785	22,0	0,01307	0,008659	
8,5	0,08367	0,05658	0,04320	23,0	0,01202	0,007978	
9,0	0,07689	0,05089	0,03894	24,0	0,01096	0,007308	
9,5	0,07074	0,04629	0,03509	25,0	0,01041	0,006994	

Tabelle 6. Theoretische Streukurven von Parallelepipeden mit Kantenverhältnis $a : 1 : 1$
(vgl. Abb. 10)

sB	$a = 0{,}9$	0,6	sB	$a = 0{,}9$	0,6
0,5	0,9807	0,9837	10,0	0,007431	0,008017
1,0	0,9246	0,9364	10,5	0,006087	0,006281
1,5	0,8374	0,8621	11,0	0,004488	0,004613
2,0	0,7275	0,7672	11,5	0,002979	0,001536
2,5	0,6048	0,6594	12,0	0,001783	0,003190
3,0	0,4798	0,5467	12,5	0,0009918	0,002147
3,5	0,3614	0,4366	13,0	0,0005883	0,001300
4,0	0,2569	0,3354	14,0	0,0005724	0,001624
4,5	0,1708	0,2474	15,0	0,0008920	0,002101
5,0	0,1048	0,1752	16,0	0,0009718	0,002068
5,5	0,05818	0,1192	17,0	0,0007703	0,001503
6,0	0,02848	0,07837	18,0	0,0004532	0,0007940
6,5	0,01204	0,05047	19,0	0,0002194	0,0003188
7,0	0,004922	0,03272	20,0	0,0001477	0,0001895
7,5	0,003456	0,02225	21,0	0,0001871	0,0002669
8,0	0,004686	0,01647	22,0	0,0002344	0,0003459
8,5	0,006543	0,01331	23,0	0,0002236	0,0003263
9,0	0,007842	0,01133	24,0	0,0001663	0,0002476
9,5	0,008122	0,009686	25,0	0,0000970	

Literatur

1. A. Guinier, Thèses, Série A, 1854 (1939).
2. G. Porod, Acta Physica Austriaca **2**, 255 (1948).
3. O. Kratky und A. Sekora, Naturwiss. **31**, 46 (1943).
4. O. Kratky, Mh. Chem. **76**, 325 (1946).
5. C. G. Shull und L. C. Roess, J. applied Physics **18**, 308 (1947).
6. O. Kratky und G. Porod, Acta Physica Austriaca **2**, 133 (1948).
7. O. Kratky, J. Polymer. Sci. **3**, 195 (1948).
8. B. R. Leonard jr., Thesis University of Wisconsin (1951).
9. G. Oster und D. P. Riley, Acta crystallogr. **5**, 1 (1952).
10. P. W. Schmidt, Acta crystallogr. **8**, 772 (1955).
11. A. G. Malmon, Acta crystallogr. **10**, 639 (1957).
12. G. Beidl, M. Bischof, G. Glatz, G. Porod, J. Ch. v. Sacken und H. Wawra, Z. Elektrochem. **61**, 1311 (1957).
13. P. W. Schmidt und R. Hight, J. applied Physics **30**, 866 (1959).
14. G. Fournet, Bull. soc. franç. mineral. et crist. **74**, 39 (1951).
15. G. Porod, Acta Physica Austriaca **3**, 66 (1949).
16. G. Porod, Z. Naturforschg. **4a**, 401 (1949).

On the So-called Stagnation Conditions and Energy (Heat) Function in Diabatic Flow

By

M. Z. v. Krzywoblocki

Michigan State University, East Lansing, Michigan, U.S.A.

(*Received November 22, 1960*)

Introduction

The author discusses some characteristic properties of a diabatic flow, in particular, the stagnation conditions and the behavior of the energy function (heat added from outside). It is shown that, in general, it is impossible to define a unique stagnation temperature, and that the added energy (heat) function along a streamline is actually a function of one independent variable only.

1. Fundamental Equations

We consider the diabatic flow (i.e., the flow of a compressible, inviscid, non-heat conducting fluid with the addition of energy (heat) from outside by means of sources or sinks). The fundamental equations are:

The first law of thermodynamics (for a perfect gas):

$$dQ = c_v\, dT + p\, dv; \qquad v = \varrho^{-1}; \qquad \text{or:} \qquad c_p\, dT = dQ + \varrho^{-1}\, dp, \tag{1.1}$$

where the symbol dQ denotes the amount of energy injected from outside into a particle; equation of a two-dimensional motion:

$$\varrho u_j\, u_{i,j} + p_{,i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2 = x, y), \tag{1.2}$$

where a subscript with a comma denotes a partial differentiation; continuity equation and equation of state (steady flow):

$$(\varrho u_i)_{,i} = 0; \qquad p = R\, \varrho\, T; \tag{1.3}$$

pressure — density — entropy relation:

$$p = C\, \varrho^{\gamma} \exp\left(c_v^{-1}\, S\right); \qquad S = \int T^{-1}\, dQ + \text{const.}; \tag{1.4}$$

equation of energy (Bernoulli):

$$\tfrac{1}{2}\, q^2 + c_p\, T - Q = c_p\, T_0 - Q_0 = \text{const.}, = C, \tag{1.5}$$

along a streamline, where Q denotes the total amount of heat injected into a particle along a streamline from the very beginning of the process of heat injection up to the point in question located on a streamline. The subscript zero refers to the so-called stagnation conditions, i.e., condition where the velocity $q = 0$. The derivation of the above equations is in Ref. [1, 2].

2. Stream Function Equation

In a steady, two-dimensional motion, the stream function is defined as:

$$\varrho u = \psi_{,y}; \qquad -\varrho v = \psi_{,x}; \qquad \varrho^2 q^2 = (\psi_{,x})^2 + (\psi_{,y})^2. \tag{2.1}$$

In Ref. [1] the following stream function equation is derived:

$$(a^2 - u^2)\,\psi_{,xx} - 2\,u\,v\,\psi_{,xy} + (a^2 - v^2)\,\psi_{,yy} = \\ = \varrho[(\gamma - 1)\,(v\,Q_{,x} - u\,Q_{,y}) - a^2\,\omega], \tag{2.2}$$

with $\omega = v_{,x} - u_{,y}$ denoting the vorticity.

Eq. (1.1) can be written in the form:

$$c_p\,T_{,i} = Q_{,i} + \varrho^{-1}\,p_{,i}, \tag{2.3}$$

and Eq. (1.5) in the form:

$$c_p\,T_{,i} - Q_{,i} = c_p\,T_{0,i} - Q_{0,i} - u_j\,u_{j,i}. \tag{2.4}$$

Combining Eq. (2.3), (2.4) and (1.2) furnishes:

$$c_p\,T_{0,i} - Q_{0,i} = u_j(u_{j,i} - u_{i,j}). \tag{2.5}$$

With $i, j = x,y$, in Eq. (2.5), multiply the results by v and $(-u)$, respectively, and add the products, thus obtaining:

$$u\,Q_{0,y} - v\,Q_{0,x} + v(c_p\,T_0)_{,x} - u(c_p\,T_0)_{,y} = q^2\,\omega. \tag{2.6}$$

Denoting the angle of the inclination of the streamline to the horizontal axis by θ furnishes the well-known relation in $\{s, n\}$-coordinate system (s — tangent to a streamline, n — normal to it):

$$\partial/\partial n = -\sin\theta \cdot \partial/\partial x + \cos\theta \cdot \partial/\partial y, \tag{2.7}$$

or

$$q\,\partial/\partial n = -v \cdot \partial/\partial x + u \cdot \partial/\partial y. \tag{2.8}$$

Since $d\psi/dn = \varrho q$, with the use of Eq. (2.8), Eq. (2.6) reduces to:

$$\omega = \varrho(dQ_0/d\psi - dh_0/d\psi), \qquad h_0 = c_p\,T_0. \tag{2.9}$$

3. Hodograph Transformation

The hodograph transformation, $\{x, y\} \leftrightarrow \{q, \theta\}$, is performed in Ref. [1]. The result is:

$$a_1\,\psi_{,qq} - c_1\,\psi_{,q\theta} - b_1\,\psi_{,\theta\theta} + a_{1,q}\,\psi_{,q} - b_{1,\theta}\,\psi_{,\theta} - c_{1,\theta}\,\psi_{,q} = 0; \tag{3.1}$$

$$a_1 = \varrho^{-1}\,q; \qquad b_1 = (\varrho\,q)^{-1}\,[q^2\,a^{-2} - 1 + (\gamma - 1)\,q\,a^{-2}\,Q_{,q}]; \tag{3.2}$$

$$c_1 = -(\gamma - 1)\,(\varrho\,a^2)^{-1}\,Q_{,\theta}. \tag{3.3}$$

4. Function

The function $Q(x, y)$ (which may be called the heat function) has some particular properties. This function represents the total energy input into a particle along a streamline. But a streamline is given by the equation $\psi = \psi(x_{st}, y_{st}) = \text{const.}$ or $y_{st} = y_{st}(x_{st})$, or at least, in an implicit form $f(x_{st}, y_{st}) = 0$. This implies that actually the function Q is defined in terms of one coordinate only x_{st} or y_{st}, $Q = Q(x_{st})$ or $Q = Q(y_{st})$. The total differentials in Eq. (1.1), considered as functions of $\{q, \theta\}$ can be written as:

$$dT = T_{,q}\, dq + T_{,\theta}\, d\theta, \qquad \text{etc.} \tag{4.1}$$

Thus Eq. (1.1), after collecting terms, gives:

$$(c_p T_{,q} - Q_{,q} - \varrho^{-1} p_{,q})\, dq + (c_p\, T_{,\theta} - Q_{,\theta} - \varrho^{-1} p_{,\theta})\, d\theta = 0. \tag{4.2}$$

Since $\{q, \theta\}$ are independent variables, (4.2) furnishes:

$$c_p\, T_{,q} - Q_{,q} - \varrho^{-1} p_{,q} = 0; \qquad c_p\, T_{,\theta} - Q_{,\theta} - \varrho^{-1} p_{,\theta} = 0. \tag{4.3}$$

Similar reasoning applied to Bernoulli's Eq. (1.5) gives:

$$q + c_p\, T_{,q} - Q_{,q} = 0; \qquad c_p\, T_{,\theta} - Q_{,\theta} = 0. \tag{4.4}$$

Comparison of Eqs. (4.3) and (4.4) yields along a streamline:

$$p_{,q} = dp/dq = -\varrho\, q; \qquad p_{,\theta} = 0, \tag{4.5}$$

or $p = p(q)$. From the same Eq. (4.5) it is obvious that $\varrho = \varrho(q)$, from the equation of state $T = T(q)$, from Eq. (4.4) $Q = Q(q)$, and from Eq. (1.4) $S = S(q)$. Briefly all the dependent variables are functions of the velocity only. This is valid in all kinds of flow: isentropic irrotational (homentropic, the same value of the entropy on all the streamlines), isentropic rotational (entropy constant along each streamline but its value differs from streamline to streamline), diabatic, etc. This is easy to explain, since a streamline $\psi(q_{st}, \theta_{st}) = \text{const.}$, furnishes $\theta_{st} = \theta_{st}(q_{st})$, and consequently $Q(q_{st}, \theta_{st}) = Q(q_{st}, \theta(q_{st})) = Q^{(1)}(q_{st})$. Thus, one can choose for $Q(x, y)$, $Q(q, \theta)$ any arbitrary function of both x and y, or q and θ. But, since Q defines the energy (heat) input function along a streamline, one of the independent variables, y or θ, can be represented in terms of $x = x_{st}$ or $q = q_{st}$, from the streamline equation $\psi(x_{st}, y_{st}) = \text{const.}$, or $\psi(q_{st}, \theta_{st}) = \text{const.}$, and so finally Q along a streamline is representable in terms of $x = x_{st}$, or $q = q_{st}$ only. Eq. (3.1) is a linear equation, but nevertheless finding a solution to it is not an easy problem. It may be an easier task to find a solution of an equation which is a little simpler than Eq. (3.1). This is especially true when some particular methods are being used to find a solution. Thus, when we can guess or assume approximately the equation of a streamline, we can express the variables in term of one independent only and find a solution of the equation in question, which is valid along any streamline. Briefly, this leads to some sort of an iteration procedure, whose convergence may be shown. This philosophy was followed in References

[1] and [2] where the function Q was assumed to be only a function of the velocity q. In this case the application of the Bergman's method is a straightforward procedure.

5. Stagnation Conditions

Consider the isentropic flow from a container, Eq. (1.5), with $Q = Q_0 = 0$. In such a flow the stagnation temperature, T_0, is the same in all the points along the streamline. Since $p = p(\varrho)$, from the equation of state one gets that p_0 and ϱ_0 are the same in all the points along the streamline. In the diabatic flow the situation is different. The difference $(c_p T_0 - Q_0)$ is constant along a streamline. Inside the container, $q = 0$, one may assume $Q \equiv Q_0 = 0$, and there is a certain T_0. At any point on the streamline, the temperature is given by the equation

$$c_p T = C + Q - \tfrac{1}{2} q^2; \qquad c_p T_{stag} = C + Q_{stag}, \tag{5.1}$$

which shows that the fluid comes to a stop. T_{stag} depends upon Q_{stag}, i.e., upon the total amount of energy (heat) added to a particle along a streamline from the very beginning of the motion up to the point where the particle came to a stop on the streamline (conditions denoted by Q_{stag}). If Q is a continuous function along a streamline, then also T_{stag} is a continuous function along a streamline and varies from point to point.

6. Rotationality

Eq. (2.9) shows that the existence of the rotationality depends upon the local stagnation conditions. The flow may be rotational at the very beginning, but it may not stay rotational all over the entire length of streamlines depending upon the energy addition along streamlines. Similarly, if the flow is irrotational at the very beginning of the motion, it may become rotational somewhere along the streamline. These factors do depend upon the function Q, which may vary from streamline to streamline.

7. Electro-Magneto-Hydrodynamics

Analogous conditions exist in electro-magneto-hydrodynamics. Consider a steady flow of a perfect gas in an electro-magnetic field. Then the equation of the conservation of momentum is of the form:

$$\varrho\, q\, dq = \tfrac{1}{2}\, \varrho\, d(q^2) = dF_e - dp, \tag{7.1}$$

where are no mechanical forces, and the BERNOULLI equation has the form:

$$\frac{1}{2}\, q^2 + \gamma(\gamma - 1)^{-1} p\, \varrho^{-1} - Q - \int \varrho^{-1}\, dF_e = H(\psi), \tag{7.2}$$

where the used symbols denote:

Q = the total amount of heat added to a particle along a streamline from the initial point (at which there is the beginning of the addition of some energy from outside the medium in question) up to the given point on the streamline, $\psi =$ = constant;

$$dQ = d\bar{Q} + j^2(\varrho\,\sigma\,q)^{-1}\,ds; \qquad q^{-1}\,ds = dt; \tag{7.3}$$

$\bar{Q}$ = all the heat injected from outside into a particle except the Joule heat;

$j^2(\varrho\,\sigma)^{-1}$ = the rate of Joule heat;

$\vec{j}$ = current density vector (magnitude j);

σ = electrical conductivity of the fluid;

F_e = electro-magnetic force potential; the electro-magnetic force is equal to:

$$\varrho_e \vec{E} + \mu_e \vec{j} \times \vec{H}; \tag{7.4}$$

$\vec{H}$ = magnetic field vector (magnitude H);

ϱ_e = the excess electric charge;

$\vec{E}$ = the electric field strength vector;

μ_e = the magnetic permeability of the fluid.

Moreover, one has to consider the Maxwell equations and the Ohm law; these are:

$$\partial(\varepsilon \vec{E})/\partial t + 4\pi \vec{j} = \operatorname{curl} \vec{H}; \qquad \operatorname{curl} \vec{E} = -\,\partial(\mu_e \vec{H})/\partial t; \tag{7.5}$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \mu_e \vec{q} \times \vec{H}) + \varrho_e \vec{q}; \tag{7.6}$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \partial \varrho_e/\partial t = 0; \tag{7.7}$$

where:

ε = the dielectric constant.

For the simplicity sake we may assume that $\varrho_e = 0$, and that the fluid medium in question is non-magnetic, i.e., that it has the same permeability as the empty space; thus the permeability is taken to be equal to 1, i.e., $\mu_e = 1$. Combining the equation, given above, furnishes another form of the energy equation:

$$d(\tfrac{1}{2} q^2 + c_p T) - (q\,\varrho)^{-1}(\vec{E} \cdot \vec{j})\,ds - d\bar{Q} = 0, \tag{7.8}$$

valid along a streamline, $\psi =$ const. As it is seen, the remarks given above, concerning the conditions at a stagnation point, are valid in the present case of a flow in electro-magneto-hydrodynamics.*

* The remarks, given above, show some particular aspects of a diabatic flow which obviously can easily be deduced after some consideration. But it seems that these simple matters are misunderstood by some writers and, as an example, we may quote a review by Germain (Sorbonne), Ref. [3] of the paper [2]. In this paper [2] all the significant aspects are presented. But Germain wrote: "Il semble, en fait, que les auteurs — qui n'insistent guère sur les hypothèses faites, ni sur leur signification physique — se restreignent au cas ou la chaleur totale introduite en un point est uniquement fonction de la vitesse." Obviously, a confusion of objectives exists in the mind of the reviewer.

References

1. M. Z. v. Krzywoblocki, and H. A. Hassan, Generalization of Bergman's Linear Integral Operator Method to Diabatic Flow. Journ. Society of Industr. and Appl. Mathem. Vol. 5, No. 2, June, 1957, pp. 47—65.
2. M. Z. v. Krzywoblocki, and H. A. Hassan, On the limiting lines in diabatic flow. Comment. Math. Univ. St. Paul. 6 (1958), 115—139.
3. P. Germain, Review of the paper: M. Z. v. Krzywoblocki, and H. A. Hassan. On the limiting lines in diabatic flow. Comment. Math. Univ. St. Paul. 6 (1958), 115—139. In: Mathematical Reviews, Vol. 19, No. 11, Dec. 1958, p. 1222.

Über die Stromdichteverteilung in zylindrischen Leitern mit elliptischem Querschnitt bei axialer Richtung des Wechselstromes

Von

Josef Bauer und **Johann Schneider**

Institut für theoretische Physik der Universität Wien

(*Eingegangen am 22. November 1960*)

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit enthält eine Berechnung des Skineffektes im unendlich langen zylindrischen Leiter von elliptischem Querschnitt. Dieses Problem wurde im Jahre 1927 von M. J. O. STRUTT bis zur formalen Lösung der entsprechenden Randwertaufgabe behandelt, ohne jedoch auf die Diskussion der beiden Grenzfälle niederer und hoher Frequenzen des Wechselstromes einzugehen. Dieselbe Aufgabe wurde im Jahre 1935 von F. LETTOWSKY nochmals in Angriff genommen, der ohne Zuhilfenahme der Funktionen des elliptischen Zylinders die Stromverteilung für den Fall niederer Frequenzen berechnete und außerdem den RAYLEIGHschen Formeln analoge Ausdrücke angeben konnte. Es wird nun über diese Untersuchungen hinausgehend durch Transformation der MAXWELLschen Gleichungen auf elliptische Zylinderkoordinaten die Differentialgleichung für die entsprechende Feldkomponente hergeleitet und die Lösung für niedere und hohe Frequenzen diskutiert. Wie zu erwarten, reduzieren sich die für den elliptischen Querschnitt gewonnenen Formeln bei der Ausartung in den Kreisquerschnitt auf die dafür wohlbekannten Werte. Außerdem werden noch die Formeln für den Widerstand und die Selbstinduktion eines elliptischen Leiters angegeben, die eine Verallgemeinerung der RAYLEIGHschen Formeln darstellen und die ebenfalls im Ausartungsfall des Kreisquerschnittes in die dafür bekannten Formeln übergehen.

1. Einleitung

Bei hochfrequenten Wechselströmen fließt der Strom nicht über den ganzen Leiterquerschnitt gleichmäßig verteilt, sondern in einer dünnen Oberflächenschicht. Diese Erscheinung, die man bekanntlich als Skineffekt bezeichnet, ist eine Wirkung der Selbstinduktion im Draht. Sie läßt eine strenge Behandlung auf Grund der MAXWELLschen Gleichungen zu und führt im kreiszylindrischen Fall auf BESSELsche Funktionen für die Felder und die Stromdichte (vgl. z. B. [1], S. 500 ff.). Im Jahre 1927 behandelte M. J. O. STRUTT [2] dieses Problem für einen Leiter von elliptischem Querschnitt. Er gab die formale Lösung des entsprechenden Randwertproblemes an, ohne dabei auf die physi-

kalisch wichtigen Grenzfälle niederer und hoher Frequenzen des Wechselstromes näher einzugehen. Erst F. Lettowsky [3] nahm 1935 diese Untersuchungen wieder auf, wobei er allerdings die Verwendung der Funktionen des elliptischen Zylinders vermied und ein besonderes Näherungsverfahren zur Anwendung brachte. Der Grund hiefür ist in dem Umstand zu suchen, daß die Rechnungen mittels der Funktionen des elliptischen Zylinders auf solche mit rein imaginärem Parameter führen, deren Verhalten jedoch damals noch nicht genügend erforscht war. Über die Untersuchungen dieser Autoren hinausgehend wird in der vorliegenden Arbeit eine Lösung dieses Problems angegeben, indem aus dem auf elliptische Zylinderkoordinaten transformierten allgemeinen Maxwellschen Gleichungen die Differentialgleichung der entsprechenden Feldkomponente hergeleitet und sodann die Stromdichteverteilung im Leiter für niedere und hohe Frequenzen des Wechselstromes diskutiert wird. Es zeigt sich, daß dabei die Kenntnis gewisser Eigenschaften der Mathieuschen Funktionen, insbesondere über ihre Entwicklung in Fourierssche Reihen, sowie über ihre asymptotische Darstellung benötigt werden. Außerdem werden Formeln für den Widerstand und die Selbstinduktion des Leiters angegeben.

2. Aufstellung und Lösung des Randwertproblems

Wir betrachten einen zylindrischen Leiter von elliptischem Querschnitt, in dem ein Wechselstrom der Frequenz ω fließt. Um uns ein Bild von der Verteilung der Stromdichte über den Leiterquerschnitt zu verschaffen, spezialisieren wir zunächst die im Anhang I zu dieser Arbeit abgeleiteten Maxwellschen Gleichungen unseren Bedürfnissen gemäß für den quasistationären Fall. (Über die Berechtigung der Annahme der Quasistationarität vgl. z. B. [4], S 122.) Wir wollen außerdem voraussetzen, daß die Leiterachse mit der z-Achse des elliptischen Koordinatensystems (ξ, η, z) zusammenfällt, wobei die folgenden Transformationsformeln für den Zusammenhang zwischen den kartesischen Koordinaten

$$x + i\,y = h\,\mathfrak{Cof}\,(\xi + i\,\eta), \qquad z = z \tag{1}$$

gelten; ferner, daß es sich um einen unendlich langen Zylinder handelt, wodurch wir den Vorgang als von z unabhängig ansehen dürfen. Die erwähnten Spezialisierungen führen zu den folgenden Feldgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{4\pi\sigma}{c}\,\mathfrak{E}_\xi &= \frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\,\xi + \sin^2\eta}}\,\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \eta}\,,\\
\frac{4\pi\sigma}{c}\,\mathfrak{E}_\eta &= -\frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\,\xi + \sin^2\eta}}\,\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \xi}\,,\\
\frac{4\pi\sigma}{c}\,\mathfrak{E}_z &= \frac{1}{h(\mathfrak{Sin}^2\,\xi + \sin^2\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\,\xi + \sin^2\eta}\cdot \mathfrak{H}_\eta\right) - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\,\xi + \sin^2\eta}\,\mathfrak{H}_\xi\right)\right\};
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\xi}{\partial t} &= -\frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \eta},\\
\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\eta}{\partial t} &= \frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \xi},\\
\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} &= -\frac{1}{h(\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{E}_\eta\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{E}_\xi\right)\right\}.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Dabei bedeuten:

c = Lichtgeschwindigkeit,

σ = Leitfähigkeit,

μ = Permeabilität,

h = lineare Exzentrizität der Querschnittsellipse.

Man sieht sofort, daß dieses System von 6 Gleichungen sich in zwei Systeme von je 3 Gleichungen spalten läßt; in dem einen kommt von den elektrischen Komponenten nur $\mathfrak{E}_z$ vor, während die entsprechende magnetische Komponente nicht auftritt; im restlichen Gleichungstripel ist es gerade umgekehrt. Dabei wird das erste System durch die letzte Gleichung (2) und die beiden ersten Gleichungen (3) gebildet; das zweite durch den Rest der Gleichungen. Im ersteren System haben wir nur magnetische Kräfte in transversaler Richtung, was gerade für unser Problem zutrifft. Wir können also im quasistationären Fall sofort schreiben

$$\mathfrak{E}_\eta = 0, \qquad \mathfrak{E}_\xi = 0, \qquad \mathfrak{H}_z = 0; \tag{4}$$

wodurch das folgende (auf 3 Gleichungen reduzierte) System der Feldgleichungen des Problems resultiert.

$$\left.\begin{aligned}
\frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_z &= \frac{1}{h^2(\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{H}_\eta\right)-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\cdot\mathfrak{H}_\xi\right)\right\}.\\
\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\xi}{\partial t} &= -\frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \eta},\\
\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\eta}{\partial t} &= \frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \xi}.
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Wir wollen zunächst aus dem Gleichungssystem (5) durch geeignete Elimination eine Differentialgleichung für $\mathfrak{E}_z$ allein ableiten; das geschieht, indem wir die erste Gleichung (5) nach t differenzieren und dann die zweite und dritte in sie einsetzen. Das liefert:

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{h^2(\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta)}\cdot\frac{c}{\mu}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{E}_z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{E}_z}{\partial \eta^2}\right)$$

oder

$$\frac{1}{h^2(\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin^2\eta)}\left\{\frac{\partial^2\mathfrak{E}_z}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{E}_z}{\partial\eta^2}\right\} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\cdot\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Da die Abhängigkeit von t bereits festgelegt ist, machen wir den Ansatz:

$$\mathfrak{E}_z(\xi,\eta,t) = \mathfrak{E}_z(\xi,\eta)\cdot e^{i\omega t}. \tag{7}$$

Man erhält nach elementaren Rechnungen, wenn man für

$$\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2} = m^2$$

setzt und beachtet, daß

$$\mathfrak{Sin}^2\xi + \sin^2\eta = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)$$

ist, die gesuchte Differentialgleichung für $\mathfrak{E}_z$ in folgender Gestalt:

$$\frac{\partial^2\mathfrak{E}_z}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{E}_z}{\partial\eta^2} + 2k^2(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)\cdot\mathfrak{E}_z = 0. \tag{8}$$

Dabei ist zur Abkürzung noch $4k^2 = -ih^2m^2$ gesetzt worden. Diese partielle Differentialgleichung läßt sich durch den Separationsansatz

$$\mathfrak{E}_z(\xi,\eta) = \Psi(\xi)\cdot\Phi(\eta)$$

in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung überführen. Man erhält mit λ als Separationskonstante:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - (\lambda - 2k^2\,\mathfrak{Cof}\,2\xi)\cdot\Psi = 0, \tag{9a}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} + (\lambda - 2k^2\cos 2\eta)\cdot\Phi = 0. \tag{9b}$$

Die Gleichung (9b) stellt die kanonische Form der MATHIEUschen Differentialgleichung dar (vgl. [5], Seite 10). Da (9a) aus (9b) durch die Transformation $\eta = i\xi$ hervorgeht, genügt es, die allgemeine Lösung von (9b) zu kennen, da wir durch die obige Transformation sofort jene von (9a) erhalten.

Die Randbedingung ist dadurch gegeben, daß $\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0$ auf $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ $(b < a)$ sein muß. Dies bedeutet nach Einführung der elliptischen Koordinaten $x = h\,\mathfrak{Cof}\,\xi\cos\eta$, $y = h\,\mathfrak{Sin}\,\xi\sin\eta$, $h^2 = a^2 - b^2$, daß die Randbedingungen in $\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0$ für $\xi = \xi_0$ wegen $x^2/\mathfrak{Cof}^2\,\xi + y^2/\mathfrak{Sin}^2\,\xi = h^2$ übergehen (denn dann ist $\mathfrak{Cof}^2\,\xi_0 = a^2/h^2$ und $\mathfrak{Sin}^2\,\xi_0 = b^2/h^2$). Die in Frage kommenden Lösungen der Gleichung (9b) müssen die Periode π haben, weil den Wertepaaren ξ,η und $\xi,\eta+\pi$ der gleiche Punkt x,y entspricht und $\mathfrak{E}_z$ natürlich eine eindeutige Funktion des Ortes sein muß. Die einzige Lösung von (9b), die diese Eigenschaft hat, ist die gerade MATHIEUsche Funktion erster Art von geradzahliger Ordnung

$$c\,e_{2n}(\eta, -k^2) = (-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r A_{2r}^{(2n)}\cos 2r\eta. \tag{10a}$$

Durch Einführung von $\eta = i\,\xi$ in (10a) erhalten wir die Lösung von (9a) für dieselben Werte der Konstanten, nämlich die modifizierte Mathieusche Funktion erster Art von geradzahliger Ordnung

$$C\,e_{2n}(\xi, -k^2) = c\,e_{2n}(i\,\xi, -k^2) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty}{}' (-1)^r A_{2r}^{2n} \operatorname{Coi} 2r\,\xi. \quad (10b)$$

Mit der vorläufig noch willkürlichen Konstanten $\mathfrak{C}_{2n}$ lautet die formale Lösung der Differentialgleichung (8)

$$\mathfrak{E}_z(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \mathfrak{C}_{2n}\, C\,e_{2n}(\xi, -k^2)\, c\,e_{2n}(\eta, -k^2). \quad (11)$$

Die Konstante $\mathfrak{C}_{2n}$ bestimmt sich aus der am Leiterumfang geltenden Beziehung $\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0$, indem wir

$$\mathfrak{E}_0 = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \mathfrak{C}_{2n}\, \mathfrak{C}\,e_{2n}(\xi_0, -k^2)\, c\,e_{2n}(\eta, -k^2)$$

beiderseits mit $c\,e_{2n}(\eta, -k^2)$ multiplizieren und über η von 0 bis 2π integrieren. Wir erhalten zunächst

$$\mathfrak{E}_0 \int_0^{2\pi} c\,e_{2n}(\eta, -k^2)\,d\eta = \sum_{n=0}^{\infty}{}' \mathfrak{C}_{2n}\, \mathfrak{C}\,e_{2n}(\xi_0, -k^2) \int_0^{2\pi} c\,e_{2n}^2(\eta, -k^2)\,d\eta.$$

Beachten wir noch die Orthogonalitätseigenschaften der Mathieuschen Funktionen und die Normierungsbedingungen (vgl. [5], S. 23), so erhalten wir für $\mathfrak{C}_{2n}$:

$$\mathfrak{C}_{2n} = \frac{2\pi\,\mathfrak{E}_0\,{A_0}^{2n}}{\mathfrak{C}\,e_{2n}(\xi_0, -k^2) \cdot \mathfrak{L}_{2n}}, \quad (12)$$

dabei ist

$$\mathfrak{L}_{2n} = \int_0^{2\pi} c\,e_{2n}^2(\eta, -k^2)\,d\eta.$$

Damit ergibt sich aus (7) und (11)

$$\mathfrak{E}_z(\xi, \eta, t) = 2\pi\,\mathfrak{E}_0 \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{A_0^{(2n)}\,\mathfrak{C}\,e_{2n}(\xi, -k^2)\,c\,e_{2n}(\eta, -k^2)}{\mathfrak{L}_{2n} \cdot \mathfrak{C}\,e_{2n}(\xi_0, -k^2)}\, e^{i\omega t}. \quad (13)$$

Zur Bestimmung der magnetischen Feldkomponenten greifen wir auf die beiden letzten Gleichungen (5) zurück. Wir erhalten ohne weiteres nach Ausführung der geforderten Differentiation von $\mathfrak{E}_z$ nach η bzw. ξ die beiden Ausdrücke

$$\mathfrak{H}_\xi = \frac{c}{\mu\,i\,\omega\,h\sqrt{\operatorname{Sin}^2\xi + \sin^2\eta}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty}{}' \sum_{r=0}^{\infty}{}' \frac{A_0^{(2n)}\,\mathfrak{C}\,e_{2n}(\xi, -k^2)\,A_{2r}^{(2n)}\,2r\sin 2r\,\eta}{\mathfrak{L}_{2n} \cdot \mathfrak{C}\,e_{2n}(\xi_0, -k^2)}\, e^{i\omega t}. \quad (14)$$

und

$$\mathfrak{H}_\eta = \frac{c}{\mu i \omega h \sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \xi + \sin^2 \eta}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_0^{(2n)}\, c\, e_{2n}(\eta, -k^2)\, A_{2r}^{(2n)}\, 2r\, \mathfrak{Sin}\, 2r\xi}{\mathfrak{L}_{2n} \cdot \mathfrak{C}\, e_{2n}(\xi_0, -k^2)} e^{i\omega t}. \tag{15}$$

Erinnern wir uns noch, daß

$$\mathfrak{H}_z = 0; \qquad \mathfrak{E}_\xi = \mathfrak{E}_\eta = 0$$

war, so haben wir damit alle Feldkomponenten für den Innenraum des Leiters bestimmt. Für das vorliegende Problem ist allerdings nur die Gleichung (13) von eigentlichem Interesse, da nur sie die Stromverteilung über den Leiterquerschnitt festlegt.

3. Diskussion der Lösung für den Fall niederer und hoher Frequenzen

Um die Stromdichteverteilung über dem Querschnitt des Leiters kennenzulernen, müssen wir die Gleichung (13) für große und kleine Werte von $|k|$ diskutieren.

a) $|k| \ll 1$.

In diesem Fall ist das Argument der in Gleichung (13) auftretenden MATHIEUschen Funktionen klein, so daß wir ihre Reihenentwicklungen heranziehen dürfen:

$$c\, e_{2n}(\eta, -k^2) =$$

$$= (-1)^n c\, e_{2n}\left(\frac{1}{2}\pi - \eta, k^2\right) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} \cos 2r\eta,$$

$$\mathfrak{C}\, e_{2n}(\xi, -k^2) = c\, e_{2n}(i\xi, -k^2) = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)}\, \mathfrak{Cof}\, 2r\xi.$$

Mit $A_0^{(0)} = 2^{-1/2}$ und $k^2 = -i\pi\sigma\mu\omega h^2/c^2$ erhalten wir, wenn wir die Reihen nach dem zweiten Glied abbrechen:

$$2^{1/2} c\, e_0(\eta, -k^2) = 1 + \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2} h^2 \cos 2\eta,$$

$$\mathfrak{C}\, e_0(\xi, -k^2) = 1 + \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2} h^2\, \mathfrak{Cof}\, 2\xi.$$

Setzt man diese Werte in (13) ein, so erhält man zunächst

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0 \frac{\left(1 + \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2} h^2 \cos 2\eta\right)\left(1 + \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2} h^2\, \mathfrak{Cof}\, 2\xi\right)}{1 + \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2} h^2\, \mathfrak{Cof}\, 2\xi_0}. \tag{14}$$

Beachten wir die Relationen (vgl. etwa [6], S. 10 ff.)

$$\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta = 2(\mathfrak{Cof}^2\xi\cos^2\eta + \mathfrak{Sin}^2\xi\sin^2\eta),$$

$$\mathfrak{Cof}\,2\xi\cos 2\eta =$$

$$= \mathfrak{Cof}^2\xi\cos^2\eta - \mathfrak{Sin}^2\xi\sin^2\eta + \mathfrak{Sin}^2\xi\cos^2\eta - \mathfrak{Cof}^2\xi\sin^2\eta,$$

$$\mathfrak{Sin}^2\xi = \mathfrak{Cof}^2\xi - 1, \qquad \mathfrak{Cof}^2\xi = \mathfrak{Sin}^2\xi + 1$$

und führen die in (14) geforderte Multiplikation im Zähler aus, so erhalten wir nach einer ziemlich langwierigen, aber prinzipiell einfachen Rechnung, die für niedere Frequenzen und kleine Permeabilitäten gültige Beziehung

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0\left\{1 - \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\,\frac{2a^2b^2}{a^2-b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right\}e^{i\omega t}. \tag{15}$$

Der aus Gleichung (14) resultierende Klammerausdruck

$$\frac{i\pi\sigma\mu\omega\,h^2}{4c^2} - \left(1 + \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2}h^2\right)x^2 - \left(1 - \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2}h^2\right)y^2$$

stellt nämlich eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a = \sqrt{\frac{h^4 i\pi\mu\sigma\omega}{4c^2\left(1 + \dfrac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2}h^2\right)}}, \qquad b = \sqrt{\frac{h^4 i\pi\mu\sigma\omega}{4c^2\left(1 - \dfrac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2}h^2\right)}}$$

dar, was man durch einfaches Ausrechnen leicht bestätigt, wobei

$$1 - \frac{i\pi\sigma\mu\omega}{2c^2}h^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

und

$$\frac{h^4 i\pi\sigma\mu\omega}{4c^2} = \frac{2a^2b^2}{b^2 + a^2}$$

ist. Aus Gleichung (15) ist zu ersehen, daß der Strom bei niederen Frequenzen den Leiterquerschnitt praktisch gleichmäßig erfüllt. Im Grenzfall $\omega = 0$ ergeben sich die stationären Verhältnisse, wie es sein muß.

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit den Verhältnissen in einem Leiter von kreiszylindrischem Querschnitt, so finden wir, wenn wir $a = b = R$ und $x^2 + y^2 = r^2$ setzen, mit $k_1^2 = -4i\pi\sigma\mu\omega/c^2$ die wohlbekannte Formel (vgl. etwa [1], S. 514):

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0\left\{1 - \frac{k_1^2}{4}(R^2 - r^2)\right\}. \tag{16}$$

b) $|k| \gg 1$.

Wir wenden uns nun der Diskussion des zweiten Grenzfalles zu. Hier benötigen wir die asymptotische Darstellung der zugeordneten Mathieuschen Funktionen mit rein imaginärem Parameter. Nach

N. W. McLachlan ([5], S. 230) gilt für $q > 0$ die folgende asymptotische Entwicklung

$$\mathfrak{C}\, e_m(z, q) = \frac{C_m}{2^{m-1/2}\, \mathfrak{Cof}^{1/2} z} \cos\left| 2k\ \mathfrak{Sin} z - (2m+1) \operatorname{arc\,tg} \mathfrak{Tg} \frac{1}{2} z \right|. \tag{17}$$

Aus dieser Formel kann man sich ohne weiteres die benötigte asymptotische Entwicklung für negativ imaginäres q herstellen, wenn man noch folgende Beziehungen beachtet (siehe Anhang II zu dieser Arbeit):

$$C_{2n} = (-1)^n 2^{2n-1/2}\, c\, e_{2n}(0) \cdot c\, e_{2n}(\tfrac{1}{2}\pi)/A_0^{(2n)}(\pi k)^{1/2},$$

$$\mathfrak{C}\, e_{2n}(z, -q) = (-1)^n\, \mathfrak{C}\, e_{2n}(\tfrac{1}{2}\pi i + z, q).$$

Daraus folgt die für die Diskussion benötigte asymptotische Formel:

$$\mathfrak{C}\, e_0(z, -q) = \frac{\mathfrak{C}_0}{2\, \mathfrak{Cof} \dfrac{z}{2}} \cdot e^{2k\, \mathfrak{Cof} z}. \tag{18}$$

Wir erhalten mit Gleichung (18) und (14) die für hohe Frequenzen und große Permeabilitäten gültige Beziehung

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0 \frac{\mathfrak{Cof} \dfrac{\xi_0}{2}}{\mathfrak{Cof} \dfrac{\xi}{2}} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}} (h\, \mathfrak{Cof}\, \xi_0 - h\, \mathfrak{Cof}\, \xi)}. \tag{19}$$

Dabei bedeutet wieder

$$k^2 = -\frac{i\pi\sigma\mu\omega h^2}{c^2}.$$

Durch Aufspaltung der e-Potenz und Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit bekommen wir die zur Diskussion notwendige asymptotische Lösung:

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0 \frac{\mathfrak{Cof} \dfrac{\xi_0}{2}}{\mathfrak{Cof} \dfrac{\xi}{2}} e^{-\sqrt{\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (h\, \mathfrak{Cof}\, \xi_0 - h\, \mathfrak{Cof}\, \xi)} \cdot e^{i\left(\omega t - \sqrt{\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (h\, \mathfrak{Cof}\, \xi_0 - h\, \mathfrak{Cof}\, \xi)\right)}. \tag{20}$$

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, daß sich das elektrische Feld, wegen des räumlich und zeitlich periodischen Faktors wellenförmig von der Oberfläche her ins Innere ausbreitet, und ferner, wegen des ersten Faktors, daß diese Welle räumlich sehr stark gedämpft ist. In unserem Falle ist nach einer Strecke

$$h(\mathfrak{Cof}\, \xi_0 - \mathfrak{Cof}\, \xi) = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}} = \frac{\sqrt{2}}{k_1}$$

das Feld auf den e-ten Teil geschwächt. Die so definierte „Eindringtiefe" deutet bekanntlich darauf hin, daß bei Wechselströmen hoher Frequenz der Strom praktisch auf eine dünne Haut an der Oberfläche des Leiters konzentriert ist (Skineffekt).

Im Falle des kreiszylindrischen Querschnittes bedient man sich zur Diskussion dieser Erscheinung der asymptotischen Darstellung der Besselschen Zylinderfunktionen (vgl. etwa [6], S. 101)

$$\lim_{x\to\infty} \mathfrak{J}_0(x\sqrt{-i}) = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{i\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}\right)}$$

und erhält damit, wenn noch

$$R - r = d = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi\sigma\mu\omega}}$$

gesetzt wird, die Formel

$$\mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}_0 \sqrt{\frac{R}{r}}\, e^{-\sqrt{\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}}\frac{d}{\sqrt{2}}} \cdot e^{i\left(wt-\sqrt{\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}}\cdot\frac{d}{\sqrt{2}}\right)}. \tag{21}$$

Führt man in Gleichung (20) den Übergang zum Kreiszylinder mittels der Beziehungen (vgl. [7])

$$h\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0 \to h\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0 \to R,$$
$$h\,\mathfrak{Cof}\,\xi \to h\,\mathfrak{Sin}\,\xi \to r$$

durch, so ergibt sich, da

$$\frac{\mathfrak{Cof}\frac{\xi_0}{2}}{\mathfrak{Cof}\frac{\xi}{2}} \to \sqrt{\frac{R}{r}}$$

geht, gerade die Formel (21), wie man durch Einsetzen sofort bestätigt.

4. Berechnung von Widerstand und Selbstinduktion des Leiters

Zu diesem Zweck berechnen wir zunächst den Gesamtstrom I durch Integration über den Leiterquerschnitt. Dazu bilden wir das Integral

$$I = \sigma \int\int \mathfrak{E}_z\, df \tag{22}$$

und beachten, daß $\mathfrak{E}_z$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial y^2} + k_1^2\, \mathfrak{E}_z = 0$$

genügt. Bezeichnen wir mit n die nach außen weisende Normale und mit ds ein Bogenelement, so dürfen wir für (22) schreiben

$$I = -\frac{\sigma}{{k_1}^2} \oint \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial n} ds = -\frac{\sigma}{{k_1}^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \xi} \cdot d\eta, \tag{23}$$

wobei für $ds = l_1 \cdot d\eta$, $\partial n = l_1 \, \partial \xi$ ([5], S. 172) und für ${k_1}^2 = -4\pi i \sigma \mu \omega / c^2$ gesetzt wird. Wird die Differentiation nach ξ mit einem Strich bezeichnet, so erhalten wir aus (22) und (13) zunächst

$$I = -\frac{2\pi\sigma \mathfrak{E}_0}{{k_1}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{A_0}^{(2n)} \, \mathfrak{C} \, e'_{2n}(\xi, -k^2)}{\mathfrak{L}_{2n} \, \mathfrak{C} \, e_{2n}(\xi_0, -k^2)} \int_0^{2\pi} c \, e_{2n}(\eta, -k^2) \, d\eta.$$

Dabei ist

$$\int_0^{2\pi} c \, e_{2n}(\eta, -k^2) \, d\eta = 2\pi \, {A_0}^{(2n)}.$$

Für den Strom innerhalb einer Ellipse $\xi < \xi_0$ resultiert daher

$$I = -\frac{4\pi^2 \sigma \mathfrak{E}_0}{{k_1}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[{A_0}^{(2n)}]^2 \, \mathfrak{C} \, e'_{2n}(\xi, -k^2)}{\mathfrak{L}_{2n} \, \mathfrak{C} \, e_{2n}(\xi_0, -k^2)}.$$

woraus wir durch Ersetzen von ξ durch ξ_0 den Gesamtstrom im Leiter erhalten

$$I = -\frac{4\pi^2 \sigma \mathfrak{E}_0}{{k_1}^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[{A_0}^{(2n)}]^2 \, \mathfrak{C} \, e'_{2n}(\xi_0, -k^2)}{\mathfrak{L}_{2n} \, \mathfrak{C} \, e_{2n}(\xi_0, -k^2)}. \tag{24}$$

Es läßt sich nun zeigen ([5], S. 367), daß die MATHIEUschen Funktionen beim Übergang zum Kreisquerschnitt in die BESSELschen Funktionen

$$\mathfrak{C} \, e_{2n}(\xi_0, -k^2) \to p'_{2n} \mathfrak{J}_{2n}(k_1 R),$$
$$\mathfrak{C}' \, e_{2n}(\xi_0, -k^2) \to p'_{2n} \, k_1 R \, \mathfrak{J}'_{2n}(k_1 R)$$

übergehen, so daß sich mit ${A_0}^{(0)} = 2^{-1/2}$ der für diesen Fall bekannte Wert

$$I = -\frac{2\pi\sigma \mathfrak{E}_0 R \, \mathfrak{J}_0'(k_1 R)}{k_1 \, \mathfrak{J}_0(k_1 R)} \tag{24a}$$

ergibt. Aus der Definitionsgleichung für Widerstand und Selbstinduktion

$$E = R \cdot I + L \frac{dI}{dt}$$

erhalten wir sofort durch Einsetzen von Gleichung (13) und Gleichung (14) die Formel

$$R - i\omega L = \frac{E}{I} = -\frac{{k_1}^2}{2\pi\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{C} \, e_{2n}(\xi, -k^2) \, c \, e_{2n}(\eta, -k^2)}{{A_0}^{(2n)} \, \mathfrak{C} \, e'_{2n}(\xi, -k^2)}. \tag{25}$$

Der Übergang zum kreiszylindrischen Fall läßt sich mit den früher erwähnten Übergangsformeln leicht durchführen und liefert, wie zu erwarten, den Wert

$$R - i\omega L = -\frac{k_1 \mathfrak{J}_0(k_1 R)}{2\pi\sigma R \mathfrak{J}_0'(k_1 R)}. \tag{25a}$$

Abschließend wollen wir noch die Formel (25) im Falle $k \gg 1$ studieren. Zu diesem Zweck bilden wir vorerst die Ableitung der asymptotischen Formel (18) nach ξ:

$$\frac{d}{d\xi}\mathfrak{C}\, e_0(\xi, -k^2) = \mathfrak{C}_0 \frac{e^{2k\mathfrak{Cof}\,\xi}}{4\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\xi}{2}} \cdot \left(4k\,\mathfrak{Sin}\,\xi - \mathfrak{Tg}\,\frac{\xi}{2}\right)$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (25) für $k \gg 1$ die Formel ($\xi = \xi_0$)

$$R - i\omega L = -\frac{k_1^2}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{4k\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0 - \mathfrak{Tg}\,\frac{\xi_0}{2}},$$

welche mit

$$h\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0 \sim h\,\mathfrak{Cof}\,\xi_0 \to R,$$

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\xi_0}{2} \to 1$$

in

$$R - i\omega L = -\frac{k_1^2}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{k_1 R - 1}$$

übergeht. Da $|k_1| R \gg 1$ ist, ergibt sich die für den Kreisquerschnitt geltende Näherungsformel

$$R - i\omega L = -\frac{k_1}{\pi\sigma R} = \frac{1 - i\sqrt{|k|}}{2\sqrt{2}R\pi\sigma}, \tag{26}$$

die nach einer einfachen Umformung die für hohe Frequenzen gültigen Rayleighschen Formeln

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{1}{2R\pi c}\sqrt{\frac{2\pi\mu\omega}{c}}, \\ L &= \frac{1}{2R\pi c}\sqrt{\frac{2\pi\mu}{\sigma\omega}} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

liefert. Damit ist das Problem der Stromdichteverteilung im zylindrischen Leiter von elliptischem Querschnitt gelöst.

Anhang I

In diesem Anhang wollen wir noch die Maxwellschen Gleichungen, die wir im Abschnitt 2 für den quasistationären Fall spezialisiert haben, in vollständiger Form in den Koordinaten des elliptischen Zylinders angeben.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_z=\\
&=\frac{1}{h^2(\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{H}_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{H}_\xi)\right\},\\
&\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\xi}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_\xi=\\
&=\frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\mathfrak{H}_z-\frac{\partial}{\partial z}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{H}_\eta),\right.\\
&\left.\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\eta}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E}_\eta=\frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{H}_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{H}_z\right\};\right.
\end{aligned}\right\}\ \text{I}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t}=\\
&-\frac{1}{h^2\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{E}_\eta)-\frac{\partial}{\partial\eta}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{E}_\xi)\right\},\\
&\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_\xi}{\partial t}=-\frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\mathfrak{E}_z-\frac{\partial}{\partial z}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{E}_\xi)\right\},\\
&\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\eta}{\partial t}=-\frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{E}_\xi)-\frac{\partial}{\partial\xi}\mathfrak{E}_z\right\}.
\end{aligned}\right\}\ \text{II}$$

Dazu treten noch die beiden Gleichungen

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}=\frac{1}{h(\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{E}_\xi)+\frac{\partial}{\partial\eta}(\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{E}_\eta)+\right.$$

$$\left.+h(\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta)\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}\right]=0 \qquad \text{III}$$

und

$$\operatorname{div}\mathfrak{H}=\frac{1}{h\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{H}_\xi)+\frac{\partial}{\partial\eta}(\sqrt{\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta}\,\mathfrak{H}_\eta)+\right.$$

$$\left.+h(\mathfrak{Sin}^2\xi+\sin^2\eta)\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}\right]=0 \qquad \text{IV}$$

Anhang II

Es soll noch die Herleitung der in Abschnitt 3 dieser Arbeit verwendeten asymptotischen Formel für die zugeordneten Mathieuschen Funktionen mit rein imaginärem Parameter kurz skizziert werden. Aus der für $z>0$ geltenden asymptotischen Entwicklung (75, S. 230)

$$\mathfrak{C}_{2m}(iz,q)\sim\frac{\mathfrak{C}_{2m}}{2^{2m-1/2}\mathfrak{C}_0(q)\sqrt{z}}\cos\left[2\sqrt{\mathfrak{Sin}\,z}-2m-1\ \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{Tg}\frac{1}{2}z\right)\right] \qquad 17$$

erhält man mit

$$\mathfrak{C}_{2n} = (-1)^n 2^{2n-1/2} c\, e_{2n}(0) \cdot c\, e_{2n}(\tfrac{1}{2}\pi)/A_0^{(2n)}(\pi k)^{1/2}$$

und der Beziehung

$$\mathfrak{C}\, e_{2n}(z, -q) = (-1)^n \mathfrak{C}\, e_{2n}(\tfrac{1}{2}\pi i + z, q)$$

für $m = 2n = 0$ zunächst den Ausdruck

$$\mathfrak{C}\, e_0(z, -q) \sim \mathfrak{C}_0 \sqrt{\frac{2}{\mathfrak{Cof}(\tfrac{1}{2}\pi i + z)}} \cdot \cos\left[2k\,\mathfrak{Sin}(\tfrac{1}{2}\pi i + z) - \operatorname{arc\,tg}\left(\mathfrak{Tg}\,\frac{\tfrac{1}{2}\pi i + z}{2}\right)\right].$$

Aus den Additionstheoremen für die Hyperbelfunktionen [6, S. 10 ff.] und den Definitionsgleichungen für $\mathfrak{Sin}\, z$ und $\mathfrak{Cof}\, z$ folgt sofort

$$\mathfrak{Cof}(\tfrac{1}{2}\pi i + z) = i\,\mathfrak{Sin}\, z, \qquad \mathfrak{Sin}(\tfrac{1}{2}\pi i + z) = i\,\mathfrak{Cof}\, z$$

und

$$\mathfrak{Tg}\,\frac{\tfrac{1}{2}\pi i + z}{2} = i \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} z i\right);$$

somit wird

$$\operatorname{arc\,tg}\left[i \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z i}{2}\right)\right] = i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1 - i\,\mathfrak{Tg}\,\frac{z}{2}}{1 + i\,\mathfrak{Tg}\,\frac{z}{2}}.$$

Berücksichtigt man noch die leicht zu beweisende Formel

$$e^{-\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\frac{1 - i\,\mathfrak{Tg}\frac{z}{2}}{1 + i\,\mathfrak{Tg}\frac{z}{2}}} = \left(i\,\mathfrak{Tg}\,\frac{z}{2}\right)^{1/2},$$

so ergibt sich aus

$$\mathfrak{Cof}\left[2k\,\mathfrak{Cof} z - i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - i\,\frac{z}{2}\right)\right] \to \frac{1}{2} e^{2k\,\mathfrak{Cof} z - i\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - i\frac{z}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2k\,\mathfrak{Cof} z} \sqrt{i\,\mathfrak{Tg}\,\frac{z}{2}}.$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (17) ein, so folgt die gesuchte asymptotische Formel zu

$$\mathfrak{C}\, e_0(z, -q) \sim \frac{c\, e_0(0) \cdot c\, e_0(\tfrac{1}{2}\pi)}{A_0^{(0)}(2\pi k)^{1/2}} \cdot \frac{e^{2k\,\mathfrak{Cof} z}}{2\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z}{2}}. \tag{18}$$

Literatur

1. A. Sommerfeld, Wechselstromwiderstand und Skineffekt. In: Ph. Frank und R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Teil 2, 1. Auflage, Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1927.
2. M. J. O. Strutt, Wirbelströme im elliptischen Zylinder. Ann. Phys. **84**, 495–506 (1927).

3. F. Lettowsky, Skineffekt in zylindrischen Leitern mit elliptischem Querschnitt. Arch. Elektrotechn. **29**, 556—567 (1935).
4. J. Fischer, Einführung in die klassische Elektrodynamik. Berlin: J. Springer, 1936.
5. N. W. McLachlan, Theory and application of Mathieu functions. Oxford: Clarendon Press, 1947.
6. E. Jahnke und F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 1. Auflage, Leipzig: B. G. Teubner, 1909.
7. J. Bauer und E. Pfleger, Über ein hydrodynamisches Analogon zum Skineffekt im elliptischen Zylinder. Acta phys. Austr. **14**, 29—38 (1961).

Sur la dynamique analytique du point en relativité*

Par

Pham Mau Quan

Faculté des Sciences, Besançon

(*Reçu le 7 Décembre 1960*)

Pour faire la dynamique analytique relativiste du point, on s'est jusqu'à maintenant contenté d'étendre sans calculs les résultats classiques. Les équations obtenues ne sont pas satisfaisantes: elles ne sont pas définies intrinsèquement sur l'espace-temps.

Je cherche des équations apparaissant comme naturelles dans le formalisme relativiste et se prêtant à des études géométriques et à des applications lointaines. Le point matériel considéré est le point matériel dans sa définition classique. Je propose d'abord de nouvelles équations du mouvement dans l'espace-temps. Je montre l'existence d'un lagrangien et d'un hamiltonien dont l'expression particulièrement simple permet l'étude géométrique des propriétés du mouvement. La théorie des invariants intégraux se révèle d'un emploi fécond. Les résultats obtenus sont susceptibles d'utilisation en vue d'obtenir des équations fondamentales de la mécanique ondulatoire relativiste.

1. Nouvelles équations du mouvement

L'espace-temps V_4 est l'espace-temps de Minkowski rapporté à des coordonnées curvilignes x^α. Soit

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

sa métrique. Soit D un domaine de V_4 où règne un champ de forces ϕ^α. On se propose d'établir les équations du mouvement du point dans le cas où le champ ϕ^α dérive d'un potentiel scalaire V (exemple: champ newtonien).

Le point matériel M en mouvement décrit dans D une trajectoire C orientée dans le temps c'est-à-dire telle que le long de C, $ds^2 > 0$. Le vecteur unitaire tangent à C définit le vecteur vitesse unitaire de M

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}\,. \tag{1.1}$$

* Vorgetragen auf dem V. Österreichischen Mathematikerkongreß in Innsbruck, 12.—17. September 1960.

Sa dérivée définit le vecteur accélération de M

$$J^\alpha = \frac{Vu^\alpha}{ds}. \tag{1.2}$$

La loi fondamentale de la dynamique relativiste du point s'écrit

$$K J^\alpha = \phi^\alpha \tag{1.3}$$

où K est un coefficient scalaire ayant les dimensions d'une énergie: c'est l'énergie de M. Il résulte de la définition du vecteur accélération qu'il est orthogonal au vecteur vitesse unitaire. Il en est de même du vecteur force: on a nécessairement

$$\phi^\alpha u_\alpha = 0$$

On doit prendre la composante orthogonale à u^α du vecteur $\vec{\text{grad}}\, V$ pour définir le vecteur force ϕ^α, soit

$$\phi^\alpha = -\partial_\beta V (g^{\beta\alpha} - u^\beta u^\alpha) \qquad \left(\partial_\beta = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right). \tag{1.4}$$

D'autre part pour rendre compte de l'énergie totale du point, somme de son énergie propre E et de son énergie potentielle $-V$, on est conduit à prendre

$$K = E - V.$$

L'énergie propre E du point est une constante.

Les équations du mouvement du point M s'écrivent alors

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha \qquad (E - V)\frac{Vu^\alpha}{ds} = -\partial_\beta V (g^{\beta\alpha} - u^\beta u^\alpha) \tag{1.5}$$

ou sous la forme équivalente

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha \qquad \frac{V}{ds}[(E - V) u_\alpha] + \partial_\alpha V = 0 \tag{1.6}$$

2. L'action généralisée

On peut écrire les équations du mouvement (1.6) sous la forme lagrangienne

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \dot{x}^\alpha \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{2.1}$$

où

$$L = (E - V)\sqrt{g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta}$$

La fonction L apparaît comme une fonction positivement homogène de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^\alpha$. Il en résulte que les trajectoires du point peuvent être obtenues comme extrêmales pour des variations à extrémités fixes de l'intégrale

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (E - V)\sqrt{g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha\, \dot{x}^\beta}\, dt \qquad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}\right) \tag{2.2}$$

où t est maintenant un paramètre arbitraire.

En vertu de l'homogénéité de L, les trajectoires sont définies intrinsèquement sur l'espace-temps V_4. L'intégrale précédente se met d'ailleurs sous la forme

$$S = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (E - V) \sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta} \tag{2.3}$$

Cette propriété prend la forme généralisée du principe d'action maupertuisienne. Et on peut interpréter les trajectoires du point comme des géodésiques de l'espace-temps V_4 muni de la métrique riemannienne

$$d\bar{s}^2 = (E - V)^2\, g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

conforme à la métrique de MINKOWSKI. On ne s'intéressera qu'à des trajectoires orientées dans le temps et on les orientera convenablement.

En particulier, supposons que l'espace-temps admette un groupe connexe d'isométries globales à trajectoires orientées dans le temps, ne laissant invariant aucun point de V_4 et laissant invariant le fonction potentielle V. En choisissant les coordonnées de manière que les trajectoires du groupe soient les lignes de coordonnées x^0, on a

$$\partial_0 V = 0.$$

La première équation de LAGRANGE (2.1) donne l'intégrale première

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^0} = h$$

soit

$$(E - V)\, u_0 = h.$$

Cette propriété généralise un résultat classique bien connu. Par projection des trajectoires sur l'espace-quotient V_3 défini par la relation d'équivalence du groupe d'isométries, on obtient alors l'énoncé du principe de MAUPERTUIS classique aux corrections relativistes près.

3. L'hamiltonien et les équations canoniques

Définissons les variables π_α conjuguées de $\dot{x}^\alpha$ par

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = (E - V)\, \frac{g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta}{\sqrt{g_{\lambda\mu}\, \dot{x}^\lambda\, \dot{x}^\mu}} = (E - V)\, u_\alpha \tag{3.1}$$

et considérons la fonction hamiltonienne H définie formellement par

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\, \dot{x}^\alpha - L$$

où les $\dot{x}^\alpha$ doivent être exprimées en fonction des π_α à l'aide des relations (3.1). En raison de l'homogénéité de L, H a une valeur nulle. Mais nous distinguerons bien la *fonction* H dont nous cherchons l'expression en fonction de x^α, π_α. On a

$$H = \pi_\alpha\, \dot{x}^\alpha - L \tag{3.2}$$

En prenant s comme paramètre, on peut donner à H l'expression

$$H = \pm \sqrt{g^{\alpha\beta}\, \pi_\alpha \pi_\beta} - (E - V). \tag{3.3}$$

La fonction H est bien définie sur l'espace fibré des vecteurs tangents à V_4. Son choix semble être adapté à l'étude de divers problèmes en dynamique analytique relativiste du point.

Considérons en particulier le système des équations

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\partial \pi^\alpha}{\partial x^\alpha} \qquad \frac{d\pi_\alpha}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}. \tag{3.4}$$

Comme en vertu de ces équations

$$\frac{dH}{ds} = \frac{\partial H}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds} + \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha}\frac{d\pi_\alpha}{ds} = 0$$

ce système admet l'intégrale première

$$H = C$$

On démontre aisément que $C = 0$ pour tout mouvement du point. Ainsi les équations (3.4) constituent le système des équations canoniques du mouvement sous la condition nécessaire et suffisante que

$$H \equiv \pm \sqrt{g^{\alpha\beta}\pi_\alpha \pi_\beta} - (E - V) = 0. \tag{3.5}$$

4. L'invariant intégral des équations du mouvement

Avec les variables canoniques x^α, π_α l'action S devient

$$S = \int_{s_0}^{s_1} \pi_\alpha \, dx^\alpha - H \, ds \tag{4.1}$$

où H désigne toujours la fonction hamiltonienne (3.3). x^α, π_α sont les coordonnées du point courant d'une courbe Γ de l'espace des états (x^α, π_α) paramétrée par s. L'intégrale est calculée le long de cette courbe.

Un calcul montre que quand on passe de cette courbe Γ à une courbe voisine, l'action S subit la variation

$$\delta S = [\pi_\alpha \, \delta x^\alpha - H \, \delta s]_0^1 + \int_{s_0}^{s_1} \delta \pi_\alpha \, dx^\alpha - d\pi_\alpha \, \delta x^\alpha + dH \, \delta s - \delta H \, ds. \tag{4.2}$$

Si Γ est une trajectoire du mouvement du point M, les équations (3.4) et (3.5) sont vérifiées, l'intégrale est nulle et dans le crochet $H = 0$. Il en résulte que si l'on passe d'une trajectoire à une trajectoire voisine, on obtient la variation de l'action

$$\delta S = [\pi_\alpha \, \delta x^\alpha]_0^1 \tag{4.3}$$

Considérons maintenant un cycle C_0 de dimension 1 de l'espace des états et les trajectoires issues de différents points z_0 de C_0. Ces trajectoires engendrent une variété différentiable à 2 dimensions τ ou tube de trajectoires. Si nous limitons chaque trajectoire à z_0 et à un point z_1 qui engendre un cycle C_1 tracé sur τ et homotope sur τ à C_0, nous pouvons appliquer la formule (4.2) à chacune de ces trajectoires pour lesquelles

on a (4.3). La variation totale de l'action S étant nulle quand x_0 décrit C_0, il vient

$$\int_{C_1} \pi_\alpha \, \delta x^\alpha = \int_{C_0} \pi_\alpha \, \delta x^\alpha.$$

Nous en déduisons que le système différentiel des équations du mouvement (3.4) admet l'invariant intégral relatif

$$\int_C \pi_\alpha \, \delta x^\alpha$$

où C est un cycle à 1 dimension de l'espace des états.

5. L'équation de Hamilton Jacobi

L'action S calculée le long d'une trajectoire du point dans V_4 est une fonction des extrémités x_0^α, x_1^α de la trajectoire (cf. (2.3)). Elle dépend encore de x_0^α, x_1^α quand on l'évalue le long d'une trajectoire dans l'espace des états. Donnons nous alors une courbe fermée C_0 quelconque considérée comme fixe. Considérons le tube de trajectoires s'appuyant sur C_0 et sur ce tube une courbe C variable tout en restant homotope à C_0. S apparaît comme une fonction de x^α et de quatre constantes $a^\alpha = x_0^\alpha$ telle que

$$\partial_\alpha S = \pi_\alpha.$$

Comme $H(x^\alpha, \pi_\alpha) = 0$ pour les équations du mouvement, on en déduit que la fonctions S doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$H(x^\alpha, \partial_\alpha S) = 0$$

obtenue en remplaçant dans l'équation (3.5) les π_α par les dérivées partielles $\partial_\alpha S$.

Cette équation aux dérivées partielles s'écrit explicitement

$$\pm \sqrt{g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha S \, \partial_\beta S} - (E - V) = 0 \tag{5.2}$$

où

$$g^{\alpha\beta} \, \partial_\alpha S \, \partial_\beta S - (E - V)^2 = 0 \tag{5.2'}$$

C'est l'équation généralisée de HAMILTON JACOBI dont le système différentiel aux caractéristiques est identique au système des équations canoniques du mouvement (3.4).

On montre immédiatement que la connaissance d'une intégrale complète S de cette équation fournit suivant la méthode de JACOBI les équations sous forme finie du mouvement du point. D'après (5.2') la famille d'hypersurfaces

$$S = \text{const.}$$

est orientée dans l'espace. Elle est telle que $\partial_\alpha S \, dx^\alpha = 0$. Comme $\partial_\alpha S = \pi_\alpha$, les trajectoires du champ de vecteurs π_α sont trajectoires orthogonales à cette famille d'hypersurfaces. En vertu de (3.1), il en est de même des trajectoires du point.

6. Cas où il existe un potentiel vecteur

Considérons maintenant un point matériel M chargé, d'énergie propre E et de charge propre e. Placé dans un champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ il est soumis à la force de LORENTZ $e F_{\alpha\beta} u^\beta$. Nous supposerons plus généralement qu'il est en présence simultanée de deux champs: champ newtonien dérivant d'un potentiel scalaire V et champ électromagnétique dérivant d'un potentiel vecteur φ_α tel que

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha. \tag{6.1}$$

Il nous faudra prendre comme équations du mouvement

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha \qquad (E - V)\frac{Du^\alpha}{ds} + \partial_\beta V (g^{\beta\alpha} - u^\beta u^\alpha) - e F^{\alpha\beta} u_\beta = 0 \tag{6.2}$$

On peut faire une étude analogue à celle qui a été faite pour le cas d'un potentiel scalaire. Ainsi, les équations du mouvement dérivent du lagrangien

$$L = (E - V)\sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} + e\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha \qquad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}\right). \tag{6.3}$$

L apparaît encore comme une fonction homogène de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^\alpha$. Les trajectoires du point définies intrinsèquement sur l'espace-temps comme courbes extrêmales de l'intégrale d'action maupertuisienne généralisée

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (E - V)\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta} + e\varphi_\alpha\, dx^\alpha \tag{6.4}$$

peuvent être interpétrées comme géodésiques de l'espace-temps V_4 muni de la métrique finslérienne

$$d\sigma = (E - V)\sqrt{g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta} + e\varphi_\alpha\, dx^\alpha. \tag{6.5}$$

A partir des variables lagrangiennes x^α, $\dot{x}^\alpha$ on passe aux variables canoniques x^α, π_α en posant

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = (E - V) u_\alpha + e\varphi_\alpha \tag{6.6}$$

et en introduisant la fonction hamiltonienne

$$H = \pm\sqrt{g^{\alpha\beta}(\pi_\alpha - e\varphi_\alpha)(\pi_\beta - e\varphi_\beta)} - (E - V) \tag{6.7}$$

qui est bien définie sur l'espace fibré des vecteurs tangents à V_4. On démontre que sous la condition nécessaire et suffisante

$$H = \pm\sqrt{g^{\alpha\beta}(\pi_\alpha - e\varphi_\alpha)(\pi_\beta - e\varphi_\beta)} - (E - V) = 0 \tag{6.8}$$

l'hamiltonien H fournit les équations du mouvement sous la forme canonique

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} \qquad \frac{d\pi_\alpha}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}.$$

Avec les nouvelles variables, l'action S s'écrit

$$S = \int_{s_0}^{s_1} \pi_\alpha \, dx^\alpha - H \, ds. \tag{6.9}$$

On montre qu'il existe un invariant intégral relatif pour les équations du mouvement et que la fonction d'action S satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$g^{\alpha\beta} (\delta_\alpha S - e \varphi_\alpha) (\partial_\beta S - e \varphi_\beta) - (E - V)^2 = 0. \tag{6.10}$$

La connaissance d'une intégrale complète S de cette équation donne encore la solution des équations du mouvement. Les trajectoires du champ de vecteur π_α sont trajectoires orthogonales à la famille d'hypersurfaces $S = C\,t\,e$. Mais les trajectoires du point M ou trajectoires du champ de vecteur u_α ne le sont plus.

On the General Form of the Special Theory of Relativity. IV

By

M. Z. v. Krzywoblocki

Michigan State University

(*Received January 9, 1961*)

Summary

The author shows that in order to obtain the most significant result of the classical special theory of relativity, i.e., the equivalence of mass and kinetic energy, it is unnecessary to enforce the condition $s(x, y, z, t) = s'(x', y', z', t')$. It is sufficient to use $s = g(s')$, where $g(s')$ is any arbitrary (decent) function of s'.

Introduction

The formalism of the classical special theory of relativity is based, between others, on two fundamental assumptions: the absolute constancy of the velocity of light and the invariance of the metric in the (four-dimensional) space-time. In the previous parts (I to III) of the present series of papers the author has shown that the constancy of light does not need to be preserved. The most significant result of the classical special theory of relativity is the equivalence of mass and kinetic energy. In the present note the author shows that, to obtain this result, one does not need to preserve the invariance of the metric. It is perfectly sufficient to assume the relation $s = g(s')$, where $g(s')$ is any arbitrary function of s'.

1. Arc-Lengths

Consider the fundamental aspects of the special theory of relativity, as formulated by EINSTEIN, MINKOWSKI, and others. Assume a four-dimensional space-time. Let S and S' denote two inertial frames, of which S' has a uniform translational velocity u relative to S. The axes are chosen so that the x-axes and the $x\,y$-planes in two frames slide along each other. At the origins, let us count time from the instant at which these points momentarily coincide. Let t be the time at which some event happens at a point having coordinates (x, y, z) as measured by the observer on frame S, and let (x', y', z', t') be the space coordinates and time of the same event as measured by the observer on S'. In the classical theory of relativity the analysis is performed under the assump-

tion that the reference velocity, the velocity of light, c, is an absolute constant. In the series of papers, published previously, the author of the present note performed the analysis under the assumption that the velocity c is a function of the position and time, i.e., $c = c(x, y, z, t)$, or $c' = c'(x', y', z', t')$. But all the previous authors, including the present writer, derived the final equations using the fundamental requirement of the classical special theory of relativity, i.e., the invariance of the distance between two points, P_1 and P_2 in S or of the corresponding points P_1' and P_2' in S':

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 =$$
$$= (ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c'^2(dt')^2. \tag{1.1}$$

Let us attempt in the present case to resign from this requirement. Assume a finite arc in S, $\overset{\frown}{P_1 P_2} = s$, and the corresponding arc in S', $\overset{\frown}{P_1' P_2'} = s'$. But, suppose that there exists a functional relation between s and s', i.e.:

$$s' = f(s), \qquad \text{or} \qquad s = g(s'), \tag{1.2}$$

where $g(s')$ is any arbitrary decent function of s'.

Since it may be more convenient to operate with the differentials, we get:

$$(ds)^2 = (dg/ds')^2\,(ds')^2, \tag{1.3}$$

or,

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 =$$
$$= (dg/ds')^2\,[(dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c'^2(dt')^2]. \tag{1.4}$$

In this consider g (and g') to be a parametric function, not subject to differentiation or integration operations in S or S'. Let us require that the equality (1.4) is preserved (is invariant) under the following group of transformation:

$$x' = \alpha\, x - \beta\, u\, t; \qquad y' = y; \qquad z' = z; \tag{1.5}$$
$$t' = \gamma\, t - \delta u\, x\, c^{-2},$$

where, in general, the coefficients α, β, γ, δ, are supposed to be functions of (x, t, c) and u, with u playing the role of a parameter. Let us repeat the entire procedure of calculation, presented in the first paper of the present series of papers, leading to Eqs. (1.24), (1.25). The result is, that the right hand sides of Eqs. (1.24) and (1.25) are multiplied by the factor (dg/ds'), i.e.:

$$x = C\, x' - u\, B\, t' =$$
$$\left(\frac{dg}{ds'}\right)\left[\int c(c^2 - u^2)^{-1,2}\,dx' + u\int c'(c^2 - u^2)^{-1,2}\,dt'\right]; \tag{1.6}$$
$$t = A\, t' - u\, D\, c'^{-2}\, x' =$$
$$\left(\frac{dg}{ds'}\right)\left[u\int c^{-1}(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dx' - \int c'(c^2 - u^2)^{-1/2}\,dt'\right]. \tag{1.7}$$

A similar result is obtained when one seeks the transformation formulae

$$x' = x'(x, t), \text{ and } t' = t'(x, t).$$

2. Velocity Components

The velocity components are defined by the ratios:*

$$v_x = dx/dt; \quad v_y = dy/dt, \text{ etc.} \tag{2.1}$$

Since both dx, dy and dt contain the factor (dg/ds'), then the magnitudes of the velocity components remain unchanged, i.e., they are the same as in the previous Parts (I to III) of the present series, where $(dg/ds') = 1$. But this simply implies that the equation for the variation of mass remains unchanged, i.e.:

$$m = m_0(1 - v^2 c^{-2})^{-1/2}, \qquad v \equiv u. \tag{2.2}$$

Conclusions

As mentioned in Part I of the present series of papers, the classical special theory of relativity was derived under some fundamental assumptions, from which, in particular, two are of a special interest in the present series: the constant velocity of light and invariance of the metric (length of an arc) in the (four-dimensional) space-time. The most significant result of the special theory of relativity was the equivalence of mass and kinetic energy. The author has shown that this result remains unchanged when both the above mentioned assumptions are not preserved, i.e., when the velocity of light is a function of the position and time, and when $s = g(s')$, where g is any arbitrary function of s'. From the geometrical standpoint the condition $s = s'$ is equivalent to some sort of a parallel (or even orthogonal) projection, whereas the condition $s = g(s')$ with $s \gtrless s'$ is equivalent to some sort of a perspective (point) projection. There seems to be no reason why the condition $s = s'$ should be enforced.

Attention is called to the fact that in the first paper of the present series in deriving Eqs. (1.20), (1.21), the author did not require that dx and dt in Eq. (1.11) are perfect differentials, i.e., $\partial K/\partial t' \neq \partial(-uL)/\partial x'$. An arbitrary assumption was made, $L = -N$, in Eqs. (1.17) to (1.19), leading to the final formulas. This arbitrariness will be removed in the next papers of the author to be published soon.

References

M. Z. v. Krzywoblocki, On the General Form of the Special Theory of Relativity, I, II, III. Acta Physica Austriaca, Vol. XIII, No. 4, 1960, pp. 387–394, and subsequent issues in Vol. XIV.

* In this case the restriction that (dg/ds') is a parametric function, not subject to differentiation or integration operations in S or S', can be removed.

Buchbesprechungen

Einführung in die Differentialgeometrie. Von W. Blaschke und H. Reichardt. Zweite Auflage. Mit 57 Textabbildungen, VII, 173 S. [Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften: Band 58.] Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Ganzleinen DM 24.—, geh. DM 19.80.

Diese Differentialgeometrie weicht in Auffassung und Gesamtanlage von der übrigen einschlägigen Literatur einigermaßen ab. Die Theorie der Raumkurven wird als Streifentheorie aufgezogen, die Flächentheorie beginnt mit der inneren Flächenlehre und bringt die äußere Flächenlehre, die sonst wegen ihrer größeren Anschaulichkeit meist an den Anfang gestellt wird, erst später.

Die wesentlichen mathematischen Hilfsmittel sind Pfaffsche Formen und alternierender Differentialkalkül. Die Streifen- und Flächenlehre besteht dann in der Hauptsache in der Deutung und Auswertung der Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen.

Im Titel führt das Buch die Bezeichnung Einführung. Dem Stoffumfang nach ist das sicher richtig, doch ob etwa ein Anfänger mit der hier gebotenen Darstellung sofort zurechtkommt, mag dahingestellt bleiben. Das soll keine abfällige Kritik sein, denn wer das Gebiet etwas näher kennt, wird viel Freude an dem in diesem Buch eingeschlagenen Weg und seinen Gesichtspunkten haben.

Die besondere Liebe des Verfassers zur Geschichte der Differentialgeometrie kommt in den vielen eingestreuten historischen Notizen zum Ausdruck.

Gegenüber der ersten Auflage ist so gut wie nichts verändert worden, nur ein Abschnitt über n-dimensionale Differentialgeometrie vom zweiten Verfasser ist neu dazugekommen.

H. Neuer, Graz

Einführung in die symbolische Logik mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von R. Carnap. Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 5 Textabb., XII, 241 S. Wien: Springer-Verlag. 1960. Ganzleinen S 168.—, DM 28.—, sfr. 28.70, $ 6.65, £ 2/7/6.

Bereits sechs Jahre nach dem ersten Erscheinen liegt nun eine Neuauflage der Carnapschen „Einführung" vor, ein Beweis dafür, wie sehr eine eingehende systematische Darstellung der symbolischen Logik einem allgemeinen Bedürfnis entsprach.

Das Werk erscheint im wesentlichen in der alten Gestalt, Aufbau und Zielsetzung sind unverändert geblieben: Die „mathematische Logik", „Logistik" oder „symbolische Logik", wie die geläufigsten Bezeichnungen für die moderne Logik lauten, einem größeren Kreis Interessierter zugänglich zu machen. In erster Linie wendet sich das Buch dabei an den an der Grundlagenforschung seines Faches interessierten Naturwissenschaftler. Der sehr ausführlich gehaltene zweite Teil des Buches ist der Anwendung der symbolischen Logik auf Axiomensysteme der verschiedensten Wissenschaftsgebiete gewidmet: Arithmetik, Mengenlehre, Geometrie, Physik und Biologie.

Von einer üblichen Einführung unterscheidet sich das Werk in zweifacher Hinsicht:

1. Neben den Grundlagen der Logistik werden die höheren Gebiete, insbesondere die für die Anwendung der symbolischen Logik bedeutsame Relationentheorie kurz dargestellt.

2. Der Autor ist bemüht, den Leser in die selbständige Arbeit mit den „symbolischen Methoden" (vgl. S. V) einzuführen.

Besondere Sorgfalt widmet der Verfasser der Behandlung der sprachlichen Darstellungsmittel. Im ersten, systematischen Teil bedient er sich dreier logischer „Objektsprachen" (A, B, C). Als Metasprache dient die deutsche Sprache, „ergänzt durch gewisse technische Zeichen" (S. 77 ff.). Im zweiten Teil führt er (S. 161 ff.) „drei Formen der Dingsprache" (I, II, III) und verschiedene Koordinatensprachen — auf der Basis der natürlichen, ganzen und reellen Zahlen — ein (S. 163 ff.).

Für den Anfänger wird das Buch dadurch etwas schwerer zugänglich, als es vielleicht wünschenswert wäre. Als Grundlage für Selbststudien ist das Werk daher nicht ohne weiteres zu empfehlen, so ausgezeichnet es als „Textbuch" neben Vorlesungen oder Übungen in symbolischer Logik zu verwenden ist. In dieser Hinsicht besonders wertvoll ist der in der neuen Auflage um zahlreiche Beispiele vermehrte Apparat an Übungsaufgaben, denen teilweise kurze Erläuterungen, leider aber keine Lösungen beigefügt sind. In der Anlage entspricht das Buch einem mindestens ein-, wie der Verfasser empfiehlt, besser zweijährigen Einführungskurs in die Logistik.

Der Umfang des Bandes hat um mehr als 30 Seiten zugenommen. Neben zahlreichen stilistischen Verbesserungen kam es zu einer Reihe tiefergreifenderer Veränderungen, Ergänzungen, Auslassungen und Umstellungen, deren bedeutendste im Vorwort zur zweiten Auflage angeführt sind.

Carnaps eigene Forschungen waren immer von dem Bemühen um größte Reinheit der Ableitung (vollständige Angabe der angewendeten Deduktionsregeln und ihre streng formale Formulierung) und exakte Definitionen (S. 2) gekennzeichnet. So betreffen auch die umgearbeiteten Stellen der neuen Auflage in erster Linie Verbesserungen zugunsten größerer definitorischer Exaktheit.

In S. 20 ff. werden die Begriffe „Sprache", „syntaktisches System" und „semantisches System" präzisiert. Ein neuer Abschnitt 26 b („Über die Möglichkeit einer Formalisierung von Syntax und Semantik") bringt genauere Definitionen für „Kalkül" und „interpretierter Kalkül", „Sprache" und „interpretierte Sprache". In 42 a wird nun zwischen der Grundsprache L und der aus ihr durch Hinzufügung der axiomatischen Konstanten gebildeten axiomatischen Sprache L' unterschieden. In 42 b wird der Unterschied zwischen Deutung (Interpretation) und Modell erläutert.

Dem Begriff der linearen Ordnung (31 d) wird nunmehr eine zweite Explikation mit Hilfe des Begriffes der einfachen Ordnung (D 8) beigefügt, die später (in 38 a) als Grundlage für die Definition des Begriffs der Ordinalzahl verwendet wird. Die in der ersten Auflage allein angegebene Explikation durch den Begriff der Reihe gestattet, da es keine Reihen mit nur einem Glied gibt, die Definition der Ordinalzahl Eins nicht (S. 156).

Im zweiten Teil kam es zu einer Reihe von Veränderungen, die in erster Linie den vollkommen neu bearbeiteten Abschnitt über das „Axiomensystem der Mengenlehre" betreffen (S. 43). Neu aufgenommen wurde das Axiom der Regularität (A 9), an Stelle von 43 b erscheint eine vom Autor selbst vorgeschlagene Formulierung des Fraenkelschen Axioms der Beschränktheit in der symbolischen Objektsprache (A 10). 43 c bringt eine neue Fassung des Axiomensystems mit

Individuenvariablen als alleinigen Variablen. Ebenso wird in 46 eine zweite Fassung des Axiomensystems der Umgebungen angegeben.

Das gut ausgewählte Literaturverzeichnis wurde in der neuen Auflage ebenfalls durch die Aufnahme von Veröffentlichungen aus den letzten Jahren erweitert.

Brigitte Rollett-Gorbach, Graz.

Die technische Physik der Lichtbogenschweißung einschließlich der Schweißmittel. Von W. M. Conn. Mit 231 Abb., 62 Tafeln, 386 S. [Techn. Physik in Einzeldarstellungen: Band 13]. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. — München: J. F. Bergmann. 1959. Ganzleinen DM 58.—.

Im vorliegenden Werk wird einerseits dem technischen Physiker ein Überblick über den Stand der Forschung dieses Gebietes gegeben und die Anwendung grundlegender Erkenntnisse aufgezeigt, andererseits aber findet der Praktiker Antwort auf die Frage nach dem „Warum" seiner oft den theoretischen Erkenntnissen weit vorausgeeilten Erfahrungen.

So ist es ein großes Verdienst des Verfassers mit großer Sorgfalt und Sachkenntnis seinen eigenen Forschungsergebnissen umfangreiches Literaturmaterial auch aus oft schwer zugänglichen Quellen (UDSSR, Japan) der letzten Jahrzehnte hinzugesellt zu haben. Der Fachmann erhält hiemit durch diese Bereicherung der schweißtechnischen Fachliteratur wertvolle Hinweise für weitere Forschung, Anwendungsmöglichkeiten in der Praxis und ein umfassendes wissenschaftliches Nachschlagewerk.

Vorangestellt ist ein Abschnitt über die Wärmequellen (102 Seiten). Hier befaßt sich der Verfasser mit der Lichtbogenphysik, insbesondere den Temperaturen, die im Schweißbogen auftreten, sowie mit seiner Zündung, dem Bogenmechanismus, hier besonders mit den neueren Untersuchungen über den fortschreitenden „Schweißlichtbogen", mit der Charakteristik in ihren maßgebenden Größen: Bogenspannung, Stromstärke und Länge des Bogens, sowie mit den Möglichkeiten das Leitvermögen im Bogenraum zu beeinflussen. Als weitere Wärmequelle wird die Stromwärmeerhitzung behandelt, als bisher vielfach unterschätzte Erwärmung durch Widerstandserhitzung im Dauerbetrieb, weiters die exothermen Vorgänge, wie Rekombination von positiven und negativen Ladungsträgern zu neutralen Gebilden, Assoziation von Atomen und Bildungswärmen bei verschiedenen chemischen, exothermen Reaktionen und als letzte Möglichkeit das getrennte Schmelzen des Zusatzmaterials.

Die Behandlung der Kräfte und des Werkstoffüberganges (78 Seiten) trägt ihrer großen Bedeutung für die Güte der Schweißung Rechnung. Auch hier wird wieder von den Beobachtungstatsachen, wie Steifheit des Bogens, Blaswirkung, Wirkung mechanischer Kräfte, Wirkung explosiver Kräfte, ausgegangen und deren theoretische Grundlagen nachgewiesen. Beim Werkstoffübergang wird eingegangen auf die Bestimmungsmethoden, die verschiedenen Einzelheiten, die beim Übergang auftreten bei nackten Elektroden, Mantel und Seelenelektroden, wobei darauf hinzuweisen ist, daß hier wohl erstmalig der feintropfige, spruhregenartige Materialübergang an Stelle des grobtropfigen Überganges als „normaler" Übergang erläutert worden ist. In weiterer Folge wird noch auf die Möglichkeiten den Werkstoffübergang zu beeinflussen näher hingewiesen.

Von großem Interesse ist der Abschnitt Schmelzbänder (46 Seiten), wo thermische Eigenschaften, Gasblasenentfernung und Einführung von Legierungsbildern dargelegt werden.

An die Energiebilanz (14 Seiten) und die Besprechung der Wärmeausbreitung (13 Seiten) schließt sich ein Abschnitt über die Technik der Lichtbogenschweißung

(101 Seiten) an, der auch sehr wertvolle Anregungen dem in der Entwicklung von Schweißzusatzstoffen und Schweißmaschinen Tätigen geben kann.

Vorteilhaft für das Studium dieses Kapitels kann die jedem Unterabschnitt beigegebene Voranstellung einer Übersicht der theoretischen Grundlagen als Nachschlagemöglichkeit angesehen werden. Gezeigt werden hier die Schutzgasschweißung, vor allem aber die Unterpulverschweißung, mit eingeschlossen die Herstellung und Zusammensetzung der Schweißmittel und die Herstellung und Verwendung von Mantel- bzw. Selenelektroden.

Ein umfangreiches Namen-, Literatur- und Sachverzeichnis ist dem Buch angeschlossen. R. Musyl, Graz.

Elektronische Hilfsmittel des Physikers. Von W. Gruhle. Mit 167 Abb., VIII, 200 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. DM 29.80.—.

Ein wirklich gutes Stück! Das kann man als Physiker, der täglich mit elektronischen Problemen zu tun hat, wohl besten Gewissens feststellen. Dieses Buch will nicht Lehrbuch der Elektronik oder gar Schaltungssammlung sein, sondern es stellt sich die Aufgabe, für auftretende elektronische Probleme mögliche Lösungen aufzuzeigen, und weiters Berechnungsmethoden für Schaltungen vorzuführen, ohne den Suchenden vor die Aufgabe zu stellen, zuvor die vorangestellten Kapitel erarbeiten zu müssen.

Der klar in vier Hauptabschnitte gegliederte Inhalt beschäftigt sich mit der Erzeugung, Veränderung, Kombination und Registrierung von Signalen. (Im Hinblick auf die Verwendung der Elektronik in der Kernphysik steht die Behandlung des Impulses im Vordergrund!) Ergänzt werden diese Themen noch durch je einen Abschnitt über Bauelemente, Strom- und Spannungsquellen und konstruktive Bemerkungen. Besonders erwähnenswert ist die umfangreiche Bibliographie, die mit über 350 Literaturzitaten Hinweise auf moderne Arbeiten mit fertigen Schaltungen u. ä. gibt.

Speziellere Teilgebiete, wie Hochfrequenz- und Mikrowellentechnik, Kernresonanzverfahren, elektronische Rechenmaschinen, Regeltechnik u.a.m., über die ohnedies eine umfangreiche Literatur existiert, wurden bewußt fortgelassen, um den Umfang des Buches nicht zu groß zu machen, ebenso wurde auf die Physik und Anwendung von Transistoren verzichtet.

Möge dieses Buch dem praktisch arbeitenden modernen Physiker, dem die Elektronik zu einem nicht mehr wegzudenkenden Hilfsmittel für Steuerung und Messung geworden ist, ein unentbehrlicher und mit Erfolg verwendeter Ratgeber werden. K. Oroszy, Graz.

Théorie Relativiste des Fluides à Spin. Von F. Halbwachs. Mit Textabb., X, 294 S. Paris: Gauthier-Villars, éditeur. 1960. ffr. 60.—, $ 12.50.

Seit der Entstehung der Wellenmechanik ist auch der von M. Madelung zum erstenmal bemerkte hydrodynamische Gesichtspunkt bekannt geworden. Im Jahre 1925 führt dieser den Spin des Elektrons in die Wellenmechanik ein. Obwohl man seit 30 Jahren in zahllosen Arbeiten die Lösungen der Diracschen Gleichung untersucht, ist es erst in den letzten Jahren besonders durch M. Takabayasi, MM. Bohm und Vigier ermöglicht worden, hydrodynamische Betrachtungen einzuführen. Das eben erschienene Werk des bekannten Autors ist einer Zusammenstellung dieser Gesichtspunkte, sowie ihrer theoretischen Durchführung gewidmet. In dieser neuen Theorie der Partikel wird jede Art von Teilchen durch ein Ensemble von Quantenzahlen beschrieben und das Verhalten dargestellt.

Die Arbeiten des Verfassers sind auf diesem Gebiete bahnbrechend gewesen und nehmen eine wichtige Stellung auf diesem Gebiete der modernen Physik ein.

P. Urban, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. Flügge. Mitherausgeber C. Truesdell. **Band IX: Strömungsmechanik III.** Mit 248 Figuren, VIII, 815 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Ganzleinen DM 198.—. (Bei Verpflichtung zur Abnahme des gesamten Handbuches Subskriptionspreis DM 158.40.)

Der vorliegende Band IX, Strömungsmechanik III des Handbuches der Physik behandelt im ersten Abschnitt die mathematische Theorie der Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit. Da die Differentialgleichungen bekanntlich nichtlinear sind, ist eine strenge Behandlung unmöglich, es sind daher vereinfachende Annahmen notwendig. Es wird daher die Viskosität, thermische Leitfähigkeit und andere äußere Kräfte, die im allgemeinen wirksam sind, vernachlässigt. Der Artikel ist in fünf Abschnitte gegliedert, von denen der erste den physikalischen und mathematischen Grundlagen gewidmet ist und der zweite die linearisierte Theorie behandelt. Im dritten Abschnitt wird die Hodographenmethode erörtert, während der vierte und fünfte Abschnitt die analytische Theorie der zweidimensionalen Über- und Unterschallströmung darstellt. Der Artikel ist im allgemeinen recht verständlich gehalten und gibt einen guten Überblick dieses mathematisch schwierigen Zweiges der Hydrodynamik. Eine ausführliche Bibliographie soll das Arbeiten auf diesem Gebiete erleichtern.

Der zweite Artikel aus der Feder von Henri Cabannes behandelt die Stoßwellen. Dieses mathematisch äußerst schwierige Gebiet, welches dem Verfasser des Artikels den größten Teil seiner Entwicklung verdankt, wird in wunderbar klarer und übersichtlicher Weise dargestellt. Es sei hierbei besonders auf den Abschnitt über die Bildung und Ausbreitung von Ebenen- und Stoßwellen hingewiesen, in welchem an Hand von sehr instruktiven Beispielen alle wichtigen Probleme, wie der Fall der Reflexion von Mach und anderes mehr äußerst verständlich dargestellt werden.

Der dritte Abschnitt von R. E. Meyer behandelt die Theorie der Gasdynamik für den Fall der Viskosität Null auf Grund der Navier-Stokesschen Gleichungen in vereinfachter Form. Hier sei besonders auf die Behandlung der Wellenfronten, der Verzweigungs- und Grenzlinien, sowie auf die Lösung des allgemeinen Wellenproblems verwiesen, die als äußerst klar zu bezeichnen ist. Auch die Bewegung bei veränderlicher Entropie wird sehr instruktiv behandelt.

Im folgenden Artikel findet man die linearisierte Theorie unstetiger Strömungen von kompressiblen Flüssigkeiten. Dieser Artikel wurde von R. Timman verfaßt und behandelt vor allem den Einfluß der Viskosität, der Kutta-Joukowski-Bedingung, sowie die übrigen Randbedingungen.

Die letzten zwei, ebenfalls sehr lesenswerten Artikel, behandeln einerseits die mathematischen Methoden der Kavitation und Jets, die besonders in der letzten Zeit große Fortschritte gemacht haben, anderseits die Theorie der Oberflächenwellen. Infolge des großen Umfanges dieser Artikel ist es dem Referenten nicht möglich auf alle Einzelheiten einzugehen. Es sei besonders auf die Existenz und Eindeutigkeitstheorie hingewiesen, die sich im wesentlichen auf die mathematischen Arbeiten von Birkhoff und Zarantanello stützen, sowie auf die verschiedenen Methoden der konformen Abbildung. Besonders in mathematischer Hinsicht kann der Artikel über die Oberflächenwellen von John V. Wehausen und Edmund V. Laitone an Ausführlichkeit und Klarheit nicht überboten werden. Auch hier

wird am Schluß ein ausführliches Literaturverzeichnis über das gesamte Schrifttum gebracht.

Wie die früheren Bände stellt auch dieser Band des Handbuches der Physik eine wertvolle Stütze für alle Fachkollegen dar, die sich mit diesem modernen Wissenzweig der Physik befassen. P. Urban, Graz

Handbuch der Physik — Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von S. Flügge. Band X: Struktur der Flüssigkeiten. Mit 41 Abb., VI, 320 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Ganzleinen DM 96.— (Bei Verpflichtung zur Abnahme des ges. Handbuches Subskriptionspreis DM 76.80).

Dieser Band des nunmehr aus physikalischen Bibliotheken nicht mehr wegzudenkenden neuen Handbuches der Physik zeichnet sich wie die bereits erschienenen Bände durch Übersichtlichkeit und anschauliche Darstellung des Stoffes aus. Dabei wird der Stoff bis ins Detail behandelt und die noch offenen Fragen ihrer Bedeutung gemäß herausgestellt.

Der Band gliedert sich in drei Teile: Struktur der Flüssigkeiten, Oberflächenspannung und Kapillarität.

Das erste Thema wird von Herbert S. Green ausführlichst behandelt. Er versucht zuerst jene Merkmale festzusetzen, die einigermaßen scharf den flüssigen Zustand vom gasförmigen und festen abzugrenzen vermögen. Dann werden die einzelnen Theorien zur Untersuchung der Struktur der Flüssigkeiten vorgestellt. Als nächstes wird gezeigt, wie man die radiale Verteilungsfunktion finden kann und wie man aus dieser die thermodynamischen, elastischen und dielektrischen Eigenschaften ableiten kann. Ein Kapitel beinhaltet irreversible Prozesse, vor allem Diffusion, Soreteffekt und Wärmeleitfähigkeit, und ihren Einfluß auf die Struktur, sowie die Deformationserscheinungen infolge der Viskosität. Die restlichen Abschnitte sind der Quantentheorie der Flüssigkeiten vorbehalten.

Die Molekulartheorie der Oberflächenspannung wird von Syu Ono und Sohei Kondo mit Hilfe der Thermodynamik und statistischen Mechanik erläutert. Sehr ausführlich werden die numerischen Berechnungen für Elektrolyte und reine Flüssigkeiten besprochen, sehr ins Detail gehend sind auch die anderen Abschnitte dieses Kapitels.

F. P. Buff behandelt die Theorie der Kapillarität und teilte den Stoff in „allgemeine Theorie" und „Anwendungen".

Umfangreiche Literaturhinweise bei jedem Kapitel, sowie ein deutsches und ein englisches Sachverzeichnis vervollständigen das Gebotene, sodaß dieses Buch seinem Zweck als Nachschlagewerk gerecht wird. Daneben sind vor allem die Kapitel von Green und Buff so abgefaßt, daß ein Studium dieser Phänomene auch für Nichtfachleute möglich ist. H. Zingl, Graz.

Radiophysikalisches und radiochemisches Grundpraktikum. Von L. Herforth und H. Koch. Mit 171 Abb., XIV, 468 S. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Geb. DM 29.20.

Das vorliegende Buch entstand aus Versuchsanleitungen, die für das Isotopenpraktikum am Institut für angewandte Radioaktivität in Leipzig von den Verfassern ausgearbeitet worden waren. Es ist begreiflich, daß ein immer stärkeres Interesse erwachte, diese Versuchsanleitungen zu einem Praktikumsbuch etwa nach der Art des „Physikalischen Praktikums" von Westphal erweitert und ausgearbeitet in Buchform vorliegen zu haben.

Der dabei auftretenden Vielfalt von Problemen ist nicht leicht Rechnung zu tragen, doch kann gleich eingangs bemerkt werden, daß die Auswahl der Versuche

und die Art und Weise ihrer Zusammenstellung eine sehr glückliche waren. Man kann bei einem derartigen Buch verständlicherweise nicht auf alle Einzelheiten eingehen und es sollen daher nur die wesentlichen Gesichtspunkte aufgezeigt werden.

Die erste Hälfte ist der Radiophysik und ihrer Anwendung gewidmet. Die Meßtechnik der Zählrohre, Szintillationszähler und Ionisationskammern wird ausreichend behandelt. Dabei sind die Versuche so zusammengestellt, daß man mit allen wesentlichen Fehlerquellen und spezifischen Eigenschaften des jeweiligen Nachweisverfahrens vertraut wird.

Eine Reihe von Aufgaben befaßt sich mit dem Problemkreis der Strahlenschutzüberwachung, wie Dosismessungen, Verseuchungsmessungen usw. Darauf folgen einige Kapitel, die sich mit den verschiedensten Anwendungen der Strahlenphysik befassen. Etwa Messung dünner und dicker Schichten, Messung von Füllstandshöhen oder die so wichtige Aktivierungsanalyse.

Als zweite Hälfte folgen nun Probleme der Radiochemie. Die Versuche behandeln die Trennung und Anreicherung von Radioisotopen nach den verschiedensten Methoden, die Isotopenverdünnungsanalyse, die radiometrische Analyse und vieles andere mehr. Den Abschluß bildet ein eigenes Kapitel über das Arbeiten mit Kohlenstoff 14. Im Anhang sind eine Reihe von nützlichen Tabellen sowie die Zerfallsschemata der wichtigsten Radioisotope zu finden. Die Literaturzitate bei den jeweiligen Kapiteln sind in einem für ein Praktikumsbuch ausreichenden Maß vorhanden.

Aus dem Gesagten ist sicher hinreichend ersichtlich, daß das vorliegende Buch für alle strahlenphysikalischen und strahlenchemischen Praktika ein außerordentliches Hilfsmittel darstellt. Es wird sich mit der noch stets steigenden Notwendigkeit ausreichender Isotopenpraktika sehr bald großer Wertschätzung erfreuen. Als etwaiger Mangel in der Ausstattung wäre zu bemerken, daß die Qualität des Papiers für ein Buch, das voraussichtlich einer sehr starken Benutzung unterliegt, nicht ganz geeignet erscheint. N. Pucker, Graz

Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -Räume. Von D. A. Kappos. IV, 136 S. [Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Neue Folge: Heft 24.] Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1960. Steif geheftet DM 21.80.

Strukturuntersuchungen von Mengenkörpern und Booleringen sind für die Wahrscheinlichkeitstheorie von Bedeutung, weil es von der Struktur des Mengenkörpers bzw. Booleringes abhängt, ob man auf ihm ein nichttriviales Maß mit bestimmten Eigenschaften einführen kann. Fragen dieser Art wurden in den letzten zwanzig Jahren sowohl von rein maßtheoretischen wie auch von wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten aus untersucht. Der vorliegende Bericht gibt erstmalig einen zusammenfassenden Überblick über die wesentlichsten dieser Arbeiten.

Das Wahrscheinlichkeitsfeld wird definiert als ein Boolering mit einer strikt positiven und additiven Wahrscheinlichkeit. Daneben wird noch der Begriff der Quasi-Wahrscheinlichkeit eingeführt, das ist eine Wahrscheinlichkeit, die nicht strikt positiv ist. Durch eine metrische Erweiterung des Wahrscheinlichkeitsfeldes läßt sich dann stets erreichen, daß die Wahrscheinlichkeit σ-additiv ist. Jedes Wahrscheinlichkeitsfeld läßt sich durch einen Wahrscheinlichkeitsraum, wie er in der klassischen Theorie üblicherweise zugrundegelegt wird, darstellen, und zwar so, daß die Wahrscheinlichkeit bei dieser Darstellung σ-additiv ist. Der Übergang in umgekehrter Richtung, das heißt vom Wahrscheinlichkeitsraum zum

Wahrscheinlichkeitsfeld, kann durch Restklassenbildung modulo Nullmengen bewerkstelligt werden.

Ein weiterer wichtiger Begriff der Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder, nämlich das cartesische Produkt mit beliebig vielen Faktoren, wird ausführlich behandelt. Auch die verschiedenen Unabhängigkeitsbegriffe werden eingehend betrachtet. Schließlich wird noch kurz auf Arbeiten von Renyi eingegangen, die sich mit den im Falle nicht normierbarer Verteilungen notwendigen Erweiterungen der Begriffe der Wahrscheinlichkeitsfelder und -räume befassen.

E. Kreyszig, Graz.

Angewandte Gitterphysik. Behandlung der Eigenschaften kristallisierter Körper vom Standpunkte der Gittertheorie. Von W. Kleber. Dritte, völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 86 Textabb., IX, 291 S. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1960. Geb. DM 38.—.

Das vorliegende Buch erscheint nun schon in der dritten Auflage (1. Auflage 1941, 2. Auflage 1949). Schon diese Tatsache allein zeigt, daß sich das Buch bewährt hat. In der Neubearbeitung und Erweiterung ist die Grundanlage des Werkes dieselbe geblieben. Gerade über die Grundgedanken ist in Buchbesprechungen der früheren beiden Auflagen in den einschlägigen Zeitschriften mehrfach referiert worden. In einem einleitenden Abschnitt werden in gedrängter Form die wichtigsten Tatsachen der Röntgenkristallographie gegeben, ebenso werden hier die wichtigsten Strukturtypen besprochen. Die folgenden beiden Hauptabschnitte bringen die Physik der idealen Kristallgitter bzw. der Realstruktur der Kristalle.

Die Behandlung des Stoffes ist übersichtlich und verständlich, es entspricht auch durchaus der Absicht des Verfassers ohne großen mathematischen Aufwand einen Überblick über die Problematik des Gebietes zu geben. Es ist an dieser Stelle vielleicht nicht überflüssig darauf hinzuweisen, daß — ebenfalls nach Absicht des Verfassers — das vorliegende Buch kein Ersatz für mathematisch streng aufgebaute Darstellungen ist.

Man kann jedenfalls dem Verfasser dankbar sein, daß er die neuen Forschungsergebnisse in die Neuauflage verarbeitet hat, ein Unternehmen, daß bei der derzeitigen raschen Entwicklung der Naturforschung gewiß nicht zu unterschätzen ist. Auch für die jetzt vorliegende dritte Auflage gilt dasselbe wie für die beiden vorhergehenden: zweifellos werden alle, die sich über das behandelte Gebiet informieren wollen, aus der Lektüre des Buches Nutzen ziehen.

H. Heritsch, Graz.

Einführung in die Physik der Leiterwerkstoffe. Von K. M. Koch und R. Reinbach. Mit 149 Abb., 255 S. Wien: Verlag F. Deuticke. 1960. S 222.—.

Dieses als zweiter Band der Serie „Einführung in die Physik der elektrotechnischen Werkstoffe" erschienene Buch wendet sich vor allem an den Elektrotechniker und den metallographisch orientierten Werkstoffachmann. Es will jedoch auch dem jungen Physiker das Verständnis des sowohl wissenschaftlich als auch technisch außerordentlich interessanten Gebietes der Leiterwerkstoffe erschließen und damit gewissermaßen zwischen Theorie und Praxis vermitteln. Diesem Bestreben der Autoren entsprechend ist der vorliegende Band in einen die Grundlagen der Elektrizitätsleitung behandelnden und einen werkstoffkundlichen Teil gegliedert.

Im ersten Abschnitt werden auf der Grundlage der Elektronentheorie der Metalle die Leitereigenschaften der Metalle und der Legierungen, die thermoelektrischen Erscheinungen in metallischen Leitern sowie die Vielfalt der gal-

vanomagnetischen und der thermomagnetischen Effekte behandelt. Der zweite, mit „Leiterwerkstoffe in der Praxis des Elektrotechnikers" betitelte Abschnitt gibt einen Überblick über die Leiterwerkstoffe, Widerstandswerkstoffe und Heizleiterlegierungen, ferner über Metalle für Widerstandsthermometer und Thermoelemente. Das Buch schließt mit einem Kapitel über die Grundlage der Theorie des Leitungsmechanismus. In den insgesamt 33 Seiten kann naturlich nur eine fluchtige Skizze der nur in einem gesonderten Band zu behandelnder Theorie gegeben werden. Auch die Autoren nennen diesen Abschnitt eine Formelsammlung mit Begleittext. Dem Referenten erscheint daher die Berechtigung für diesen letzten Abschnitt in einem Buch über Fragen der elektrotechnischen Werkstoffe zumindest fraglich. Dieses Kapitel gehört in wesentlich breiterer Form in den im Rahmen der Buchreihe vorgesehenen Band über Grundlagen der Festkörperphysik.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß das vorliegende Buch dazu beitragen wird, einerseits dem Elektrotechniker und dem Werkstoffachmann die Wichtigkeit der metallphysikalischen Grundlagen aufzuzeigen, andererseits aber auch den Physiker mit den Erfordernissen der Technik vertraut zu machen. F. Lihl, Wien

Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow. Von M. Z. v. Krzywoblocki. With an Appendix by Ph. Davis and Ph. Rabinowitz. With 3 figures, X, 188 pages. Wien: Springer-Verlag. 1960. Ganzleinen S 312.—, DM 52.—, sfr. 53.20, $ 12.40, £ 4/8/6.

Die von Stefan Bergman vor einigen Jahren in die Hydrodynamik eingeführte Methode des Integraloperators hat sich als sehr verwendbar herausgestellt. Die im Laufe der Zeit erschienenen Veröffentlichungen zu diesem Thema sind auf mehrere mathematische Zeitschriften verstreut und nur für jene lesbar, die in diesem mathematischen Zweig der Literatur eingearbeitet sind. Im wesentlichen stützt sich dieses Verfahren auf die Theorie der analytischen Funktion, im besonderen aber auf die Theorie von Funktionen von zwei komplexen Variablen.

Der Verfasser hat die sehr dankenswerte Aufgabe unternommen, die Methode mit allen ihren verschiedenen Spielarten so darzustellen, daß der theoretisch orientierte Ingenieur, bzw. der angewandte Aerodynamiker in der Lage ist, praktische Anwendungen selbständig durchzuführen. Insbesondere die berühmten Arbeiten von R. Mises und M. Schiffer, welche das Verfahren wesentlich vereinfachen, werden ausführlich in den ersten zwei Teilen des Werkes behandelt. Die anderen Kapitel sind den verschiedenen Fällen von Strömungen gewidmet und erörtern insbesondere die Singularitäten, die Randwertprobleme und die verschiedenen Rechenmethoden. Ausführliche Tabellen und ein umfangreiches Literaturverzeichnis bilden den Abschluß dieses einschlägigen, Fachleuten sehr zu empfehlenden Werkes. P. Urban, Graz

Cryophysics. Von K. Mendelssohn, F.R.S. Mit zahlreichen Textabb., VIII, 183 S. [Interscience Tracts on Physics and Astronomy: Nr. 7.] New York-London: Interscience Publishers, Inc. 1960. Geb. $ 4.50, brosch. $ 2.50.

Im Laufe der Zeit wurden die Untersuchungen physikalischer Vorgänge bei tiefen Temperaturen immer mehr zu einem Spezialgebiet der Physik, das nicht nur durch die besondere Art der dabei notwendigen Experimentiertechnik, sondern auch durch eine Reihe ganz spezifischer Erscheinungen ausgezeichnet ist. Es ist deshalb begrüßenswert, daß in der nun schon gut eingeführten Reihe „Interscience Tracts on Physics and Astronomy", herausgegeben von E. R. Marshak, auch dieses Gebiet zu Wort kommt.

Das vorliegende Buch von MENDELSSOHN behandelt kurz, aber sehr übersichtlich die wichtigsten Probleme der Tieftemperaturphysik. Ausgehend von den Methoden der Erzeugung tiefer Temperaturen, Gasverflüssigung und magnetische Abkühlung, werden die Messung derselben behandelt. Daran schließen sich die Bestimmungen der spezifischen Wärmen in diesem Temperaturbereich. Einen etwas größeren Umfang nehmen die nun folgenden Kapitel ein. Dabei werden aus dem Fragenbereich des Magnetismus der Paramagnetismus von Ionen, der Antiferromagnetismus, sowie der DE HAAS-VAN ALPHEN-Effekt behandelt. Bei den Transporterscheinungen wird auf die Wärmeleitfähigkeit der Dielektrika und der Metalle eingegangen, woran sich eine besonders lesenswerte Einführung in den Fragenkreis der Supraleitfähigkeit schließt. Abschluß bildet ein Abschnitt, der sich mit den Problemen des flüssigen Heliums befaßt.

Die klare Darstellung wird durch entsprechende Diagramme noch anschaulicher gestaltet und eignet sich vorzüglich zu einer ersten Einführung in das überaus reizvolle Gebiet der Physik tiefer Temperaturen. Für den darüber hinaus interessierten Leser bietet die angeführte Literatur in hinreichendem Maße Gelegenheit zum eingehenderen Studium spezieller Fragen. Aus diesem Grunde sollte dieses Buch ebenso wie die anderen der Reihe „Interscience Tracts an Physics and Astronomie" in keiner physikalischen Bibliothek fehlen.

N. PUCKER, Graz

Kleines Quellenbuch zur Geschichte der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gedächtnisschrift anläßlich der 100. Tagung der Gesellschaft. Im Auftrage des Vorstandes der Gesellschaft verfaßt von M. PFANNENSTIEL. Mit 5 Abb., V, 164 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1958. DM 12.60.

In seinem Vorwort sagt der Vorsitzende der 100. Tagung, K. H. BAUER, das Fest solle, nach all dem Schweren das das deutsche Volk durchgemacht habe, ein stilles sein, aber ein schönes Zeugnis abgeben für den Wert des lebendigen Wortes und des außerordentlichen Einflusses, welche hohe Wissenschaft ausübt und die aufhellende Macht des Gespräches zur Geltung bringt, wie dies ALEXANDER VON HUMBOLDT auf der Tagung des Jahres 1828 ins Treffen führte.

In diesem Band der Geschichte der Gesellschaft folgt nun eine historische Darstellung zahlreicher Sitzungen und die erste Ansprache des Gründers 1818. Wir lesen OKENS ersten Aufruf zur Vereinigung der deutschen Naturforscher und die Pressestimmen über die erste Versammlung im Dezember 1822. 1829 eröffnet ALEXANDER VON HUMBOLDT die Versammlung mit einer groß angelegten Festrede, in der er der Teilnahme namhafter Ausländer, nicht zuletzt aus den skandinavischen Staaten, gedenkt. Es drängt ihn, so sagte ALEXANDER VON HUMBOLDT, der Patriarchen vaterländischen Ruhmes zu gedenken, an erster Stelle wohl des damals noch in voller Kraft stehenden GOETHE, des großen Dichters und Naturforschers, und vieler anderer Prominenter, die dazu beitrugen der deutschen Wissenschaft Weltgeltung zu schaffen. 1832 findet die Versammlung in Wien statt mit einer Abschiedsrede J. J. LITTROWS, des zweiten Geschäftsführers. LITTROW fügte dieser Rede eine „Kapuzinerpredigt" hinzu, in der er der Versammlung ins Gewissen spricht, nicht Ideen der Spaltung der Gesellschaft in Teilgebiete nachzugeben. Wohl machten sich schon damals Erscheinungen bemerkbar, die wachsenden Teilgebiete der naturwissenschaftlichen Forschung durch gesonderte Tagungen behandeln zu lassen. Mit Recht warnt er vor zu weitgehendem Partikularismus und Verachtung der Naturwissenschaft als Ganzes.

1951 tagte die Gesellschaft nach dem Kriege in München. Der Bundespräsident Prof. Heuss eröffnete diese Tagung mit einer glänzenden und launigen Ansprache. Dabei verwies er im Speziellen auf das Studium der Geschichte der Naturwissenschaften, das dazu dienen soll, uns erkennen zu lassen, daß das, was uns die Gesellschaft heute bietet, erst langsam gedacht und aufgefaßt werden mußte.

Es folgt in dem Band ein Verzeichnis der 100 Versammlungen bis zur 100. des Jahres 1958 nebst der Neugründung der Gesellschaft 1950 nach dem großen Krieg. Angeschlossen findet sich eine große Zahl von Ansprachen und Berichten, die viel Anregendes und dauernd Gültiges enthalten.

In seiner Gesamtheit ist dieser Band der Geschichte der Gesellschaft der Naturforscher und Ärzte ein lebendiges Dokument für den Ernst und die Zielstrebigkeit deutschen Forschens und Schaffens, ein Dokument für den deutschen Forschergeist, der in der Welt Schule gemacht hat und für den das deutsche Volk die Anerkennung der Welt sich erringen konnte. G. Hofer, Graz

Proceedings of the Symposium on Millimeter Waves. New York. 1959. Herausgegeben von J. Fox. Mit zahlreichen Abb., XIX, 656 S. [Microwave Research Institute Symposia Series: Volume IX.] Polytechnic Press of the Polytechnic Institute of Brooklyn, N.Y. — New York: Interscience Publishers. Geb. $ 8.00.

Die alljährlich vom Polytechnic Institute of Brooklyn veranstaltete Fachtagung stand im Jahre 1959 unter der Devise „Millimeterwellen". Unter der Mitwirkung von militärischen Forschungsabteilungen und The Institute of Radio Engineers konnte ein reichhaltiges Programm von 39 wissenschaftlichen Vorträgen zustande gebracht werden. Die meisten der Vortragenden waren aus den U.S.A., einige aber auch aus anderen, meist europäischen Staaten. Gemeinsam mit den Vorreden der Veranstalter und dem Programm sind die Fachvorträge, welche alle in englischer Sprache gehalten worden waren, in diesem Buche wiedergegeben.

Die ersten Vorträge vermitteln eine Übersicht über die Verwendung und Verwendungsmöglichkeit der Millimeterwellen in Physik und Technik. Weiters werden die Technik der Schaltelemente und einige Meßmethoden behandelt. Der größte Raum wird wohl von den Arbeiten über die Erzeugung dieser Wellen eingenommen. Neben den üblichen Methoden, Millimeterwellen durch Clystrons und Magnetrons usw. zu erzeugen, werden bevorzugt spezielle Methoden beschrieben, die oft schon sehr an die Optik erinnern wie z. B. der Cerenkov-Radiator. Die älteste Methode zur Herstellung von Millimeterwellen, die Oberschwingungsanregung, ist die einzige, die in das Gebiet der Submillimeterwellen führt. Sie wird der Wichtigkeit entsprechend behandelt. Im weiteren werden Probleme der Wellenleiter und Resonatoren für diesen, durch kleine Abmessungen sich auszeichnenden Wellenbereich beschrieben.

Durch gleichmäßige Erfassung aller Zweige innerhalb des gesteckten Rahmens wird dem dafür interessierten Physiker oder Techniker wertvolles Informationsmaterial in die Hand gegeben, dies umso mehr, da jedem Aufsatz eine umfangreiche Literaturzusammenstellung beigefügt ist. F. Gross, Graz

Progress in Metal Physics. Band 8. Herausgegeben von Bruce Chalmers und R. King. Mit 125 Abb., 330 S. London: Pergamon Press. 1959.

Der 8. Band der Bücherreihe "Progress in Metal Physics" behandelt heute besonders aktuelle Probleme der Metallphysik. So wurden gleich im ersten Kapitel für welches L. M. Clarebrough und M. E. Hargreaves verantwortlich zeichnen, die wesentlichen Ergebnisse der in den letzten Jahren durchgeführten Unter-

suchungen an plastisch verformten Metall-Einkristallen, die in Gittern dichtester Packung kristallisieren, übersichtlich zusammengestellt. Auf das plastische Verhalten von polykristallinen Metallen wird hingegen nur kurz eingegangen. Bedeutungsvoll ist auch der Abschnitt über röntgenographische Untersuchungen an kaltverformten Metallen von B. E. Warren, in dem vor allem die theoretischen Grundlagen dargelegt werden. Zwei weitere Kapitel beschäftigen sich mit den besonders seit einigen Jahren im Mittelpunkt des Interesses stehenden Fragen der Korngrenzen (Verfasser F. Weinberg) und der Substrukturen (Verfasser C. Elbaum). Eine Zusammenfassung unserer heutigen Kenntnisse von Kristallbaufehlern, entstanden durch Bestrahlung, Kaltverformung und Abschrecken, ist in dem von W. M. Lomer geschriebenen Referat gegeben.

Die Darstellung der einzelnen Kapitel ist klar und kritisch. Das letztere gilt auch für die angeschlossenen Schrifttumsverzeichnisse. Hervorzuheben ist ferner die vorzügliche Ausgestaltung des Buches. Es reiht sich damit würdig an seine Vorgänger an.

F. Lihl, Wien

The Hall Effect and Related Phenomena. Von E. H. Putley. Mit zahlreichen Textabb., VIII, 263 S. London: Butterworths Scientific Publications. 1960. 50 s.

Dieses neueste Werk in der Reihe der Halbleiter-Monographien behandelt eingehend die Elektronenleitung in Halbleitern und die damit verbundenen Erscheinungen. Das Gewicht wird auf die experimentellen Ergebnisse gelegt und der praktischen Durchführung der Messungen breiter Raum gewidmet, doch wird auf eine gründliche theoretische Untermauerung nicht verzichtet, so daß das Zusammenarbeiten von Experiment und Theorie in der Physik der Halbleiter hier besonders veranschaulicht wird. Obwohl nur allgemeine Kenntnisse auf dem Gebiet der Festkörperphysik vorausgesetzt werden, stellt der Verfasser die Probleme und Ergebnisse bis zum neuesten Stand ohne Vereinfachung dar.

Zusammen mit einem geschichtlichen Überblick über die Erforschung des Hall-Effektes und ähnlicher Leitungserscheinungen werden im ersten Kapitel die Effekte einführend in elementarer Form beschrieben. Das zweite Kapitel ist der Messung galvanomagnetischer, thermomagnetischer und thermoelektrischer Effekte (insbesondere des Hall-Effektes und der magnetischen Widerstandsänderung) gewidmet. Daß mit Hilfe von Methoden, die der Gaskinetik entlehnt sind und unter Ersatz der klassischen Statistik durch die Fermi-Dirac-Statistik eine befriedigende theoretische Darstellung der elektrischen Leitung in isotropen Festkörpern möglich ist, wird im dritten Kapitel ausgeführt. Diese Theorie ist auf die Mehrzahl der Leitungsphänomene mit gutem Erfolg anwendbar, ausgenommen Vorgänge bei sehr tiefen Temperaturen oder hohen magnetischen Feldstärken. Im vierten Kapitel wird der Leitungsmechanismus in Halbleitern an Hand des Energiebändermodelles besprochen und daran anschließend der Einfluß von Verunreinigungen. Es wird gezeigt, wie die Abhängigkeit der elektrischen Eigenschaften von der Temperatur Aufschluß gibt über die Struktur der Energiebänder. Es folgt eine Besprechung der Streuung der Leitungselektronen an den Gitteratomen, des Einflußes der Struktur auf die Leitfähigkeit und der Quanteneffekte bei hohen magnetischen Feldstärken. Das fünfte Kapitel behandelt schließlich die spezifischen Eigenschaften verschiedener halbleitender Elemente und Verbindungen. Zahlreiche Literaturangaben beschließen jedes Kapitel.

Das Werk setzt sich zum Ziel, allen, die in der Halbleiterforschung tätig sind, als Unterlage zu dienen, sowie auf angrenzenden Gebieten arbeitenden Physikern und fortgeschrittenen Studierenden ein gründliches Einarbeiten in die Physik der Elektronenleitung in Halbleitern zu ermöglichen, wofür es bestens geeignet erscheint.

H. Koziol, Graz.

Conduction de la Chaleur en Régime Variable. Von G. Ribaud. Mit 34 Abb., 90 S. Paris: Gauthier-Villars, Éditeur. 1960. ffr. 18.—, $ 3.78.

Das vorliegende Buch über die Wärmeleitung richtet sich vor allem an die jungen Physiker und Ingenieure, die sich zum erstenmal diesem Problem gegenübersehen. Es werden für alle behandelten Aufgaben die einfachsten mathematischen Lösungen angegeben, wobei auf die physikalische Betrachtungsweise besonderer Wert gelegt wird. Am Schluß jeden Kapitels wird die Lösung auch graphisch diskutiert und einige Beispiele auch numerisch durchgerechnet.

P. Urban, Graz

Modern University Physics Von J. A. Richards, F. W. Sears, M. R. Wehr und M. W. Zemansky. Mit zahlreichen Textabb., XVI, 993 S. Reading, Massachusetts — London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1960. $ 9.75.

Alle jene, die mit dem Physikstudium beginnen, werden das Erscheinen dieses Werkes begrüßen. Aufbauend auf die Lehrbücher „University Physics" von von Sears und Zemansky und „Physics of the Atom" von Wehr und Richards, bringt dieses College-Lehrbuch einen recht guten Überblick über die klassische und vermittelt eine wertvolle Einführung in die moderne Physik.

Die Autoren haben — vom pädagogischen Standpunkt aus betrachtet — einen sehr vorteilhaften Mittelweg zwischen Experimentalphysik und theoretischer Physik eingeschlagen, der, bei sinnvoller stofflicher Auswahl und sehr bescheidener Voraussetzung mathematischer Kenntnisse, auch einem Studierenden, der sich mit geringen Vorkenntnissen an die Materie heranwagt, ein profundes Verständnis vermitteln wird. Durch die zahlreichen dem Text angeschlossenen Beispiele, die ein sehr zeitnahes Gesicht aufweisen, sowie durch die vielen Skizzen und Bilder wird das Verstehen sehr erleichtert und vertieft. Begrüßenswert ist der letzte Teil des Buches, in dem die Autoren der Notwendigkeit, schon den Anfänger mit den Begriffen der Relativitätstheorie, Atomphysik und Quantentheorie vertraut zu machen, in sehr schöner Weise Rechnung tragen. Wünschenswert bliebe nur eine etwas breitere Einführung in die für den Physiker unentbehrliche Vektorrechnung.

G. Saller, Graz.

Aufgabensammlung der Kernphysik. Von S. W. Skatschkow. Übersetzung aus dem Russischen. Mit 40 Abb., 8 Taf., 160 S. Berlin: VEB-Verlag Technik. 1960. Halbleinen DM 18.—.

Dieses Büchlein enthält 417 Aufgaben aus der Kernphysik und ihre Lösungen. Es beginnt mit dem Gesetz von Moseley und endet mit den Abschnitten für Elementarteilchenzerfall, Kosmische Strahlung, Massenspektrometer, β-Spektrometer und Beschleuniger. Dazwischen sind alle jene Probleme berücksichtigt, die für die Praxis von Bedeutung sind. Es fehlen nicht die typischen Beispiele betreffend Radioaktivität, Kernreaktionen und Neutronenphysik, sondern daneben findet man noch kompliziertere Aufgaben wie z. B. die des Kernspins nach dem Schalenmodell oder Strahlungsverluste und Ionisationsverluste bei Durchgang von Elektronen durch Luft, Aluminium und Blei, um nur zwei Beispiele zu nennen.

Wer die hier gestellten Aufgaben löst, muß nicht nur Kernphysik gelernt haben, sondern hat diese auch verstanden.

Es ist dieses Buch daher allen Studenten und Lehrern sehr zu empfehlen.

H. Zingl, Graz

Photons and Electrons. Von K. H. SPRING. Zweite Auflage. Mit Textabb., VIII, 133 S. London: Methuen u. Co. Ltd. — New York: John Wiley u. Sons Inc. 1960. 10 s 6 d net.

Die zweite Auflage des netten Büchleins von K. H. SPRING, welche zur Besprechung vorliegt, trägt der Entwicklung der letzten zehn Jahre Rechnung. Man findet qualitative Betrachtungen über die Renormierung und die Strahlungskorrekturen und im Anschluß daran eine entsprechende Erweiterung der Bibliographie. Das Büchlein soll für den ersten Überblick besonders unseren Studierenden wärmstens empfohlen werden. P. URBAN, Graz

Mechanics. Von K. R. SYMON. Second Edition. Mit zahlreichen Textabb., XIV, 557 S. Reading, Mass. — London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1960. $ 10.50.

Es handelt sich hier um ein Lehrbuch aus Mechanik für Studenten höherer Semester, welches durch seine sehr passende Auswahl des Stoffes gekennzeichnet ist. Dabei wurden den heutigen Verhältnissen entsprechend, den Anwendungen über die Atomphysik ein etwas breiterer Raum gegeben.

So findet man einen sehr ausführlichen Abschnitt für Stoßprobleme und das n-Körperproblem und vieles andere mehr, welches dann später beim Studium der Atomphysik erforderlich wird. Eine große Anzahl von Aufgaben mit Lösungen gestatten eine Selbstüberprüfung des Lesers und erläutern das Vorgetragene noch besonders.

Druck und Ausführung stellen dem Verlag ein gutes Zeugnis aus.

P. URBAN, Graz.

Symposium of Plasma Dynamics. Herausgegeben von FRANCIS H. CLAUSER. Mit zahlreichen Textabb., IX, 369 S. Reading, Mass. — London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1960. $ 12.50, 94 s.

Im vorliegenden Buch des hinsichtlich seiner Tätigkeit auf den verschiedenen Gebieten der Physik bestens eingeführten Verlages sind die Ergebnisse des Internationalen Symposiums aus Plasmadynamik in Woods Hole, U.S.A., im Jahre 1958 zusammengefaßt, wobei als Herausgeber H. CLAUSER zeichnet. An dieser, vom Air Office of Scientific Research angeregten Tagung waren in ihren entsprechenden Vertretern die Fachgebiete Astrophysik, Physik der thermonuklearen Prozesse, Gasentladungen, statistische Mechanik, Aeromechanik und Dynamik der Elektronenbündel vertreten. Die abgehandelten Problemkreise sind in neun Abschnitte geteilt, die von verschiedenen Mitherausgebern bearbeitet wurden. Diese Art hat den Vorteil, dem ganzen Tagungsbericht ein geschlosseneres und einheitliches Gepräge zu geben, als wenn man — wie es sonst meist gehandhabt wird — die einzelnen Referate mit wortgetreuer Diskussion abdruckt. Es wird damit auch der Physiker, der kein ausgesprochener Spezialist des vorliegenden besonders aktuellen Problemkreises ist, in die Lage versetzt, sich leichter einen Einblick in den augenblicklichen Stand der Plasmadynamik in allen ihren Teilgebieten zu verschaffen, als es sonst möglich wäre.

Die einzelnen Kapitel umfassen folgende Fragenkreise: 1. Experimentelle Untersuchungen an Hochtemperaturplasmen, bearbeitet von R. F. POST. 2. Probleme der thermonuklearen Fussion und Hochtemperaturplasmen von M. ROSENBLUTH, ein Überblick über die wichtigsten Fragen und Ergebnisse bei den Untersuchungen heißer Plasmen. 3. Leitungsphänomene in Plasmen von M. H. MITTLEMAN. 4. Dynamik der Elektronenbündel von R. W. GOULD, worin die von der üblichen Form des Plasmas infolge der zum größten Teil fehlenden, neutrali-

sierenden positiven Ionen abweichenden Bündel von Elektronen und deren Wechselwirkung mit den verschiedensten elektromagnetischen Feldern behandelt werden. 5. Statistische Mechanik des Plasmas von J. M. Burgers, welcher Abschnitt sich mit jenen Problemen befaßt, bei denen sich der Kontinuumsgesichtspunkt als unzureichend erweist und durch statistische Betrachtungen erweitert werden muß. 6. Die Kontinuumsdynamik des Plasmas von H. W. Liepmann und I. D. Cole umfaßt hauptsächlich Fragen im Zusammenhang mit Stoßwellen im Plasma, unter anderem die Erzeugung von Plasmen hoher Dichte. 7. Fragen der Magnetohydrodynamik im Zusammenhang mit Flugkörpern hoher Geschwindigkeit von A. Kantrowitz. 8. und 9. behandeln Probleme interplanetarer und kosmischer Magnetohydrodynamik von E. N. Parker und G. Burbidge.

Eine ausführliche Bibliographie rundet das Bild des vorliegenden Buches in angenehmer Weise ab. Es als reinen Konferenzbericht zu bezeichnen würde seinem Charakter nicht gerecht werden, es ist mehr als das. Es stellt eine Zusammenfassung eines Großteils der aus den vielen Bereichen der Plasmadynamik heute besonders interessierenden Probleme dar, für die Herausgebern und Verlag in gleicher Weise zu danken ist. N. Pucker, Graz.

Theoretical Physics in the Twentieth Century. A Memorial Volume to Wolfgang Pauli. Edited by M. Fierz and V. F. Weisskopf. X, 328 S. New York: Interscience Publishers, Inc. — London: Interscience Publishers Ltd. 1960. $ 10.—.

Zu Ehren des vor kurzem verschiedenen berühmten theoretischen Physikers Wolfgang Pauli, wurde von M. Fierz und V. F. Weisskopf ein Erinnerungsband herausgegeben, welcher Beiträge einiger berühmter Fachkollegen umfaßt.

Die verschiedenen Artikel geben zusammengenommen einen guten Überblick über die Leistungen der theoretischen Physik im bisherigen Verlauf des 20. Jahrhunderts. Auch spiegelt sich die große Vielseitigkeit Paulis aufs Deutlichste wieder und sein großer Einfluß auf die Arbeiten anderer, der sein Wirken ganz besonders charakterisiert hat.

Das Lesen des Werkes ist daher für jeden Fachkollegen als Rückschau und Übersicht von ganz besonderem Reiz und wird sich dasselbe sicherlich viele Freunde erwerben. P. Urban, Graz

Fluctuation Phenomena in Semi-Conductors. Von A. van der Ziel. Mit 17 Textabb., 168 S. London: Butterworths Scientific Publications. 1959. Geb. 35s.

Der Ausdruck "fluctuation phenomena in semi-conductors" bezieht sich auf spontane Schwankungen des Stromes in bzw. der Spannung an Halbleitern und ist nur eine andere Bezeichnung für das gebräuchliche „Rauschen in Halbleitern". Die vorliegende Monographie hat die Aufgabe, einen Überblick über den gegenwärtigen Stand der theoretischen und experimentellen Forschung zu geben, wobei vorausgesetzt wird, daß der Leser mit den Grundlagen der Halbleiterprobleme vertraut ist.

Die Fülle des in kürzester Zeit angefallenen empirischen Materials hat zur Aufstellung verschiedener, einander teilweise widersprechender Theorien geführt. Der Verfasser ist bemüht, die verschiedenartigen Erscheinungen von einem einheitlichen Gesichtspunkt zu verstehen. Dieses Vorhaben ist nicht nur von grundsätzlicher Wichtigkeit, sondern auch für die technische Anwendung von großer Bedeutung. J. Wagner, Graz

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Paul Urban, Graz, Institut für Theoretische Physik der Universität. — Druck: Berger & Schwarz, Zwettl, N.-Ö.

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr.... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzuwenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{-\frac{E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935).

Autorenkorrekturen, das heißt nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Electronic Computers. Fundamentals, Systems, and Applications. Edited by **Paul von Handel,** Institute for Defense Analyses, Washington, D. C., USA. With the cooperation of **Hans W. Gschwind, Martin G. Jaenke,** and **Robert G. Tantzen,** Air Force Missile Development Center, Holloman AFB., New Mexico, USA. (In englischer Sprache.) With 160 figures. VI, 235 pages. Gr.-8°. 1961.

Full cloth S 297.—, DM 47.20, sfr. 50.70, $ 11.80

From the preface:

This book was prepared by distinguished experts in the field of computers for the non-expert who does not intend to become an expert but who wants to acquire a general understanding of the problems and solutions which he needs to effectively perform the work in his proper field.

So we address this book to the engineer and scientist, who want to know the performance of computers, as well as to the manager, who is mainly concerned with their economic aspect.

The technical development of computing machines is going on at a rapid rate. Any detailed description of computer components would therefore become obsolete within a few years. The general principles underlying their operation will probably remain unchanged for a longer time. Accordingly, this book puts main emphasis on principles and methods rather than on engineering details.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung

SPRINGER-VERLAG IN WIEN

Soeben erschien:

Kernreaktortheorie

Eine Einführung

Von

S. Glasstone und **M. C. Edlund**

United States Atomic Energy Commission — Oak Ridge National Laboratory

Ins Deutsche übersetzt und bearbeitet von

Dr. W. Glaser und **Dr. H. Grümm**

weiland o. Professor an der Technischen Hochschule Wien — Reaktor-Interessengemeinschaft Reaktorabteilung der SGP, Wien

Mit 82 Textabbildungen. X, 341 Seiten. Gr.-8°. 1961

Ganzleinen S 239.—, DM 38.—, sfr. 40.90, $ 9.50

Der „Glasstone-Edlund", wie man dieses Buch in Fachkreisen nennt, ist bereits ein klassisches Werk geworden. Von der 1952 erschienenen englischen Originalausgabe liegt heute schon der 7. Nachdruck vor. Durch das Erscheinen dieses Buches sind die friedlichen Aspekte der Kernenergie — bis dahin überlagert von militärischen Restriktionen — zum erstenmal in wissenschaftlich klarer und erstaunlich umfassender Weise freigelegt worden. Seit langem ist dieses Werk die wichtigste, allgemein zugängliche Quelle für die Fragen der Reaktortheorie. An ihm wurde eine ganze Generation von Reaktorphysikern und Kernenergetikern erzogen.

In der Zwischenzeit ist die Kerntechnik von der Theorie und vom Experiment fortgeschritten zum Groß-Kernkraftwerk. Trotz dieser stürmischen Entwicklung hat der „Glasstone-Edlund" seinen Rang als eines der besten Lehrbücher gehalten, das für den fachlich interessierten Hochschüler, den Wissenschaftler, den Ingenieur in der Entwurfs- und Konstruktionsarbeit unentbehrlich ist.

Die deutsche Ausgabe soll das Buch dem rasch wachsenden Interessentenkreis in den deutschsprachigen Ländern näherbringen. Im Einverständnis mit den Autoren der Originalausgabe wurden in der deutschen Bearbeitung neuere Entwicklungen, vor allem durch weiterführende Literaturhinweise, berücksichtigt.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung